

Nicolae Cotfas

Liviu-Adrian Cotfas

**COMPLEMENTE
DE MATEMATICĂ
I**

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI

Introducere

Analiza complexă, spațiile Hilbert, transformarea Fourier, ecuațiile diferențiale, polinoamele ortogonale și funcțiile speciale sunt elemente de bază ale aparatului matematic utilizat în mecanica cuantică și fizica matematică.

Prezenta lucrare își propune să ofere un acces cât mai facil la anumite noțiuni matematice și în același timp, o familiarizare cu unele elemente ale formalismului matematic utilizat în descrierea sistemelor cuantice. Paragrafele conținând subiecte mai avansate sunt marcate cu *.

În partea a doua a lucrării, aflată în pregătire, se vor prezenta noțiuni și rezultate din geometria diferențială, teoria grupurilor și a algebrelor Lie, teoria operatorilor și referitoare la ecuațiile cu derivate parțiale.

Cartea se bazează pe cursurile predate de primul autor la Facultate de Fizică, Universitatea din București. Noțiunile și rezultatele teoretice au fost amplu ilustrate de al doilea autor prin inserarea unor exerciții și a unor aplicații bazate pe programul MATHEMATICA.

București, 2012

Nicolae Cotfas
Liviu-Adrian Cotfas

Cuprins

1	Elemente de analiză complexă	9
1.1	Numere complexe	9
1.2	Șiruri de numere complexe	16
1.3	Functii complexe de variabilă complexă	18
1.4	Integrala complexă	29
1.5	Serii Laurent	48
1.6	Calculul integralelor cu ajutorul reziduurilor	59
2	Spații vectoriale finit-dimensionale	73
2.1	Spații vectoriale	73
2.2	Transformări liniare	82
2.3	Dualul unui spațiu vectorial	92
2.4	Sume de spații vectoriale	96
2.5	Produs tensorial de spații vectoriale	100
3	Tensori pe spații vectoriale finit-dimensionale	105
3.1	Tensori	105
3.2	Operații cu tensori	107
3.3	Exemple de tensori	109
4	Spații Hilbert finit-dimensionale	113
4.1	Spații cu produs scalar	113
4.2	Baze ortonormate	116
4.3	Dualul unui spațiu cu produs scalar	121
4.4	Sisteme de vectori coerenți	126

4.5	Spații Hilbert	128
4.6	Adjunctul unui operator	134
4.7	Transformări unitare și transformări ortogonale	137
4.8	Transformarea Fourier finită	142
4.9	Operatori autoadjuncți (hermitici)	146
4.10	Produs tensorial de spații Hilbert	150
4.11	Sisteme cuantice cu spațiu Hilbert finit-dimensional	153
5	Elemente de teoria distribuțiilor	163
5.1	Distribuții	163
5.2	Distribuții temperate	182
5.3	Transformarea Fourier a funcțiilor	188
5.4	Transformarea Fourier a distribuțiilor	195
5.5	Aplicații în mecanica cuantică	203
6	Ecuatii și sisteme de ecuații diferențiale liniare	225
6.1	Ecuatii diferențiale de ordinul întâi	225
6.2	Ecuatii diferențiale liniare de ordin superior	231
6.3	Sisteme diferențiale liniare	241
7	Polinoame ortogonale și funcții speciale asociate	251
7.1	Polinoame Legendre	251
7.2	Funcții Legendre asociate	261
7.3	Polinoame Laguerre	263
7.4	Polinoame Hermite	268
7.5	Polinoame de tip hipergeometric	272
7.6	Funcții speciale asociate	279
7.7	Ecuatii Schrödinger rezolvabile explicit	286

Capitolul 1

Elemente de analiză complexă

1.1 Numere complexe

1.1.1 Mulțimea numerelor complexe

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i = \{z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

considerată împreună cu operațiile de adunare

$$(x + yi) + (x' + y'i) = (x + x') + (y + y')i$$

și de înmulțire cu un număr real

$$\alpha(x + yi) = \alpha x + \alpha yi$$

este spațiu vectorial real de dimensiune 2. Scrierea unui număr complex sub forma $z = x + yi$ reprezintă dezvoltarea lui în raport cu baza $\{1, i\}$. Aplicația

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto x + yi$$

este un izomorfism care permite identificarea celor două spații vectoriale și conduce la o reprezentare geometrică naturală a numerelor complexe în plan (*planul complex*).

1.1.2 Relația $i^2 = -1$ permite definirea unei operații suplimentare pe $\mathbb{C}$

$$(x + yi)(x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + yx')i.$$

numită *înmulțirea numerelor complexe*. Mulțimea $\mathbb{C}$ considerată împreună cu operațiile de adunare și înmulțire a numerelor complexe este corp comutativ. În particular, fiecare număr complex nenul admite un invers

$$(x + yi)^{-1} = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$

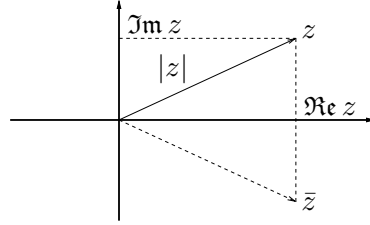


Figura 1.1: Conjugatul unui număr complex

1.1.3 Definiție. Fie $z = x + yi$ un număr complex.

Numărul $\Re z = x$ se numește *partea reală* a lui z .

Numărul $\Im z = y$ se numește *partea imaginară* a lui z .

Numărul $\bar{z} = x - yi$ se numește *conjugatul* lui z .

Numărul $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ se numește *modulul* lui z .

1.1.4 MATHEMATICA $\text{Re}[x+yi]$, $\text{Im}[x+yi]$, $\text{Abs}[x+yi]$, $\text{Conjugate}[x+yi]$

$\text{In}[1] := i$	$\mapsto$	$\text{Out}[1] = i$	$\text{In}[5] := \text{Re}[3+4i]$	$\mapsto$	$\text{Out}[5] = 3$
$\text{In}[2] := \text{Sqrt}[-4]$	$\mapsto$	$\text{Out}[2] = 2i$	$\text{In}[6] := \text{Im}[3+4i]$	$\mapsto$	$\text{Out}[6] = 4$
$\text{In}[3] := (3+2i)^2$	$\mapsto$	$\text{Out}[3] = 5+12i$	$\text{In}[7] := \text{Abs}[3+4i]$	$\mapsto$	$\text{Out}[7] = 5$
$\text{In}[4] := (3+2i)/(5-i)$	$\mapsto$	$\text{Out}[4] = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$	$\text{In}[8] := \text{Conjugate}[3+4i]$	$\mapsto$	$\text{Out}[8] = 3-4i$

1.1.5 Propoziție. *Relațiile*

$$\begin{aligned} \overline{z_1 \pm z_2} &= \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 & \overline{z_1 z_2} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2 & \overline{(z^n)} &= (\bar{z})^n \\ |\bar{z}| &= |z| & |z|^2 &= z \bar{z} & \overline{(\bar{z})} &= z \\ \Re z &= \frac{z + \bar{z}}{2} & \Im z &= \frac{z - \bar{z}}{2i} & z &= \Re z + i \Im z. \end{aligned}$$

au loc oricare ar fi numerele complexe z_1, z_2 și z .

Demonstrație. Relațiile rezultă direct din definiție (pag. 10-3).

1.1.6 Oricare ar fi φ și ψ avem

$$\begin{aligned}
(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) &= (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) \\
&+ i(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi) = \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi).
\end{aligned}$$

Utilizând notația lui Euler

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

relația anterioară devine

$$e^{i\varphi} e^{i\psi} = e^{i(\varphi + \psi)}.$$

1.1.7 Pentru orice număr nenul $z = x + yi$ există $\arg z \in (-\pi, \pi]$ încât

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) = |z| e^{i \arg z}.$$

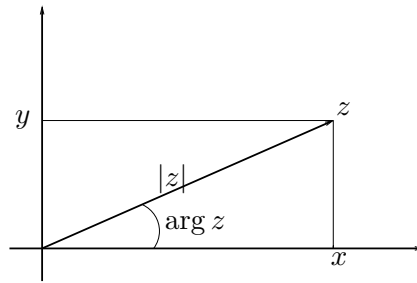


Figura 1.2: Modulul și argumentul unui număr complex

Numărul $\arg z$, numit *argumentul principal* al lui $z = x + yi$, este

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & \text{dacă } x > 0 \\ \pi + \arctg \frac{y}{x} & \text{dacă } x < 0, y > 0 \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x} & \text{dacă } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{dacă } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{dacă } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

1.1.8 MATHEMATICA $\text{Arg}[x+yi]$, $\text{N}[\text{Arg}[x+yi]]$

$$\begin{array}{llll}
\text{In}[1] := \text{Arg}[-1] & \mapsto & \text{Out}[1] = \pi & \text{In}[3] := \text{Arg}[2+3i] & \mapsto & \text{Out}[3] = \text{ArcTan}\left[\frac{3}{2}\right] \\
\text{In}[2] := \text{Arg}[i^{15}] & \mapsto & \text{Out}[2] = -\frac{\pi}{2} & \text{In}[4] := \text{N}[\text{Arg}[2+3i], 9] & \mapsto & \text{Out}[4] = 0.982793723
\end{array}$$

1.1.9 Funcția

$$\arg : \mathbb{C}^* \longrightarrow (-\pi, \pi]$$

este discontinuă pe semidreapta numerelor reale negative

$$(-\infty, 0) = \{ z \mid \Re z < 0, \Im z = 0 \}$$

deoarece pentru $x \in (-\infty, 0)$ avem

$$\lim_{y \nearrow 0} \arg(x + yi) = -\pi \quad \text{și} \quad \lim_{y \searrow 0} \arg(x + yi) = \pi.$$

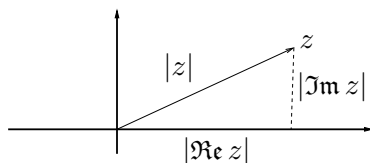


Figura 1.3: Relația între $|z|$, $|\Re z|$ și $|\Im z|$.

1.1.10 Propoziție. Oricare ar fi numărul complex $z = x + yi$ avem

$$\left. \begin{array}{l} |x| \\ |y| \end{array} \right\} \leq |x + yi| \leq |x| + |y|$$

adică

$$\left. \begin{array}{l} |\Re z| \\ |\Im z| \end{array} \right\} \leq |z| \leq |\Re z| + |\Im z|.$$

Demonstrație. Avem

$$|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| \quad |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|$$

iar relația

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$$

este echivalentă cu relația evident adevărată

$$x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2.$$

1.1.11 Propoziție. Aplicația modul $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

este o normă pe spațiul vectorial real $\mathbb{C}$, iar $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

este distanța asociată.

Demonstrație. Oricare ar fi numărul complex $z = x + yi$ avem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

și

$$|z| = 0 \iff z = 0.$$

Dacă α este număr real atunci

$$|\alpha z| = |(\alpha x) + (\alpha y)i| = \sqrt{(\alpha x)^2 + (\alpha y)^2} = \sqrt{\alpha^2(x^2 + y^2)} = |\alpha| |z|.$$

Oricare ar fi numerele $z_1 = x_1 + y_1i$ și $z_2 = x_2 + y_2i$ avem relația

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|\Re(z_1 \bar{z}_2)| \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

din care rezultă că

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

1.1.12 Dacă considerăm $\mathbb{R}^2$ înzestrat cu norma uzuală

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

atunci

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + yi|$$

ceea ce arată că aplicația liniară

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto x + yi$$

este un izomorfism de spații vectoriale normate care permite identificarea spațiilor normate $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|)$ și $(\mathbb{C}, | \cdot |)$. Dacă se are în vedere doar structura de spațiu vectorial normat, spațiile $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|)$ și $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ diferă doar prin notațiile utilizate. Distanța

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

dintre două numere $z_1 = x_1 + y_1i$ și $z_2 = x_2 + y_2i$ în planul complex corespunde distanței dintre punctele corespunzătoare din planul euclidian (a se vedea Fig. 1.4)

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

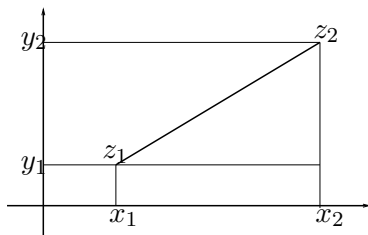


Figura 1.4: Distanța dintre două puncte

1.1.13 In planul complex:

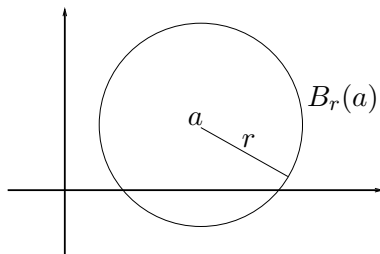
$$|z_1 - z_2| = \text{distanța între } z_1 \text{ și } z_2.$$

$$|z| = |z - 0| = \text{distanța între } z \text{ și origine.}$$

Fie $a \in \mathbb{C}$ fixat și $r > 0$. Mulțimea

$$B_r(a) = \{ z \mid |z - a| < r \}$$

se numește *discul* (deschis) de centru a și rază r (a se vedea Fig. 1.5).

Figura 1.5: Discul de centru a și rază r

1.1.14 Definiție. Spunem că o mulțime $M \subset \mathbb{C}$ este *mărginită* dacă există $a \in \mathbb{C}$ și $r > 0$ astfel încât $M \subseteq B_r(a)$.

1.1.15 Exercițiu. Mulțimea M este mărginită dacă și numai dacă există $r > 0$ astfel încât $|z| \leq r$, oricare ar fi $z \in M$.

1.1.16 Definiție. O mulțime $D \subseteq \mathbb{C}$ este numită *mulțime deschisă* dacă oricare ar fi $a \in D$ există $r > 0$ astfel încât $B_r(a) \subset D$. Spunem că despre o mulțime $F \subseteq \mathbb{C}$ că este *închisă* dacă mulțimea $\mathbb{C} - F$ este deschisă.

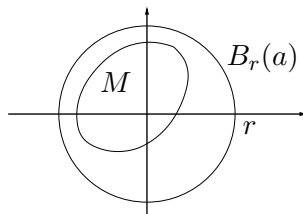


Figura 1.6: Mulțime mărginită.

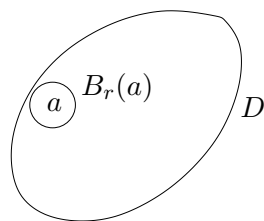


Figura 1.7: Mulțime deschisă.

1.1.17 Exemple.

- a) Discul $B_1(0)$ este mulțime deschisă.
- b) Semiplanul $\{ z \mid \Im z > 0 \}$ este mulțime deschisă.
- c) Orice mulțime finită $F \subseteq \mathbb{C}$ este o mulțime închisă.
- d) Semiplanul $\{ z \mid \Re z \geq 0 \}$ este mulțime închisă.

1.1.18 Definiție. O mulțime $K \subseteq \mathbb{C}$ este numită *mulțime compactă* dacă este închisă și mărginită.

1.1.19 Exercițiu. Să se arate că relațiile

$$a) \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$b) \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

$$c) \quad |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

au loc oricare ar fi numerele complexe z_1 și z_2 .

Rezolvare. a) Avem

$$(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2).$$

b) Din

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|, \quad |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1|$$

rezultă relația

$$-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

echivalentă cu

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

c) Prin calcul direct obținem

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

1.2 Șiruri de numere complexe

1.2.1 Definiție. Spunem că șirul $(z_n)_{n \geq 0}$ este *convergent* la a și scriem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - a| = 0.$$

1.2.2 Din relația

$$\left. \begin{array}{l} |x_n - \alpha| \\ |y_n - \beta| \end{array} \right\} \leq |(x_n + y_n i) - (\alpha + \beta i)| \leq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|$$

rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n i) = \alpha + \beta i \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta. \end{cases}$$

adică șirul de numere complexe $(z_n)_{n \geq 0}$ este convergent dacă și numai dacă șirurile de numere reale $(\Re z_n)_{n \geq 0}$ și $(\Im z_n)_{n \geq 0}$ sunt convergente și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \Re z_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} \Im z_n.$$

1.2.3 Exemplu.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} + i \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} + i \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 + e i.$$

1.2.4 MATHEMATICA: $\text{Lim}[z[n], n \rightarrow \text{Infinity}]$

$\text{In}[1] := \text{Lim}[n/(n+1), n \rightarrow \text{Infinity}]$	$\mapsto$	$\text{Out}[1] = 1$
$\text{In}[2] := \text{Lim}[(1+1/n)^n, n \rightarrow \text{Infinity}]$	$\mapsto$	$\text{Out}[2] = e$
$\text{In}[3] := \text{Lim}[n/(n+1) + I (1+1/n)^n, n \rightarrow \text{Infinity}]$	$\mapsto$	$\text{Out}[3] = 1 + ie$

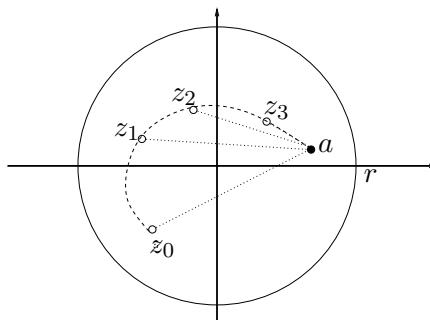


Figura 1.8: Șir mărginit convergent.

1.2.5 Definiție. Un șir $(z_n)_{n \geq 0}$ este *mărginit* dacă există $r > 0$ astfel încât

$$|z_n| \leq r, \quad \text{oricare ar fi } n \geq 0.$$

1.2.6 Din relația

$$\left. \begin{array}{l} |x_n| \\ |y_n| \end{array} \right\} \leq |x_n + y_n i| \leq |x_n| + |y_n|$$

rezultă că șirul de numere complexe $(z_n)_{n \geq 0}$ este mărginit dacă și numai dacă șirurile de numere reale $(\Re z_n)_{n \geq 0}$ și $(\Im z_n)_{n \geq 0}$ sunt mărginite.

1.2.7 Exercițiu. Să se arate că

$$\begin{aligned} a) \quad |z| < 1 &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0 \\ b) \quad |z| < 1 &\implies \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \\ c) \quad |z| < 1 &\implies \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \end{aligned}$$

Rezolvare. Avem

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} |z^n - 0| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k z^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1-z^{k+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z} \\ \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots\end{aligned}$$

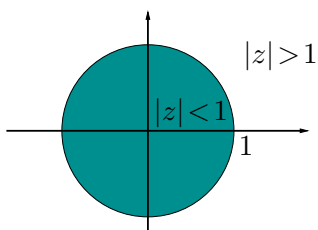


Figura 1.9: Mulțimea numerelor z cu proprietatea $|z| < 1$.

1.2.8 Definiție. Spunem că șirul de numere complexe $(z_n)_{n \geq 0}$ are *limita infinită*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$$

dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty.$$

1.2.9 Dacă $|z| > 1$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \infty$.

1.3 Funcții complexe de variabilă complexă

1.3.1 Prin *funcție complexă* se înțelege orice funcție cu valori complexe.

1.3.2 Definiție. Spunem că funcția reală de variabilă reală

$$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

este *derivabilă* în punctul $x_0 \in (a, b)$ dacă există și este finită limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

numită *derivata* funcției f în punctul x_0 .

1.3.3 Derivatele unor funcții reale de variabilă reală

Funcția	Derivata	Domeniul	Condiții
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = c$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$(0, \infty)$	$\alpha \in \mathbb{R}$
$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	
$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, \infty)$	
$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(0, \infty)$	$n \in 2\mathbb{N}^*$
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathbb{R}^*$	$n \in 2\mathbb{N}+1$
$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$(0, \infty)$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$\mathbb{R}$	$0 < a \neq 1$
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$	
$f: \mathbb{R} - (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} - (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi)$	
$f: \mathbb{R} - \mathbb{Z}\pi \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} - \mathbb{Z}\pi$	
$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	
$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{arcctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{sh} x$	$f'(x) = \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{ch} x$	$f'(x) = \operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	

1.3.4 Definiția anterioară nu poate fi extinsă direct la funcțiile de două variabile

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

deoarece relația

$$f'(x_0, y_0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{(x, y) - (x_0, y_0)}$$

este fără sens, împărțirea cu vectorul $(x-x_0, y-y_0) = (x, y) - (x_0, y_0)$ nefiind definită. Posibilitatea împărțirii cu un număr complex nenul permite însă definirea derivabilității unei funcții de variabilă complexă urmând direct analogia cu cazul real.

1.3.5 **Definiție.** Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă. Spunem că funcția complexă

$$f: D \rightarrow \mathbb{C}$$

este $\mathbb{C}$ -derivabilă (sau *olomorfă*) în punctul $z_0 \in D$ dacă există și este finită limita

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

numită *derivata* funcției f în punctul z_0 . În loc de $f'(z_0)$ scriem uneori $\frac{df}{dz}(z_0)$.

1.3.6 Exemplu. Funcția

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^3$$

este $\mathbb{C}$ -derivabilă în orice punct $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z^2 + z_0 z + z_0^2) = 3z_0^2$$

și $f'(z) = 3z^2$, adică avem

$$(z^3)' = 3z^2.$$

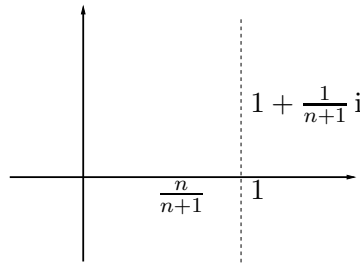


Figura 1.10: Funcția $f(z) = \bar{z}$ nu este $\mathbb{C}$ -derivabilă în $z_0 = 1$.

1.3.7 Funcția

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \bar{z}$$

nu este $\mathbb{C}$ -derivabilă în $z_0 = 1$ deoarece limita

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\bar{z} - 1}{z - 1}$$

nu există. Alegând șirul $z_n = \frac{n}{n+1}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$ obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{z}_n - 1}{z_n - 1} = 1$$

dar alegând șirul $z_n = 1 + \frac{1}{n+1}i$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$ obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{z}_n - 1}{z_n - 1} = -1.$$

1.3.8 Bazându-ne pe identificarea lui $\mathbb{C}$ cu $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : x + yi \mapsto (x, y)$$

putem descrie orice funcție complexă de o variabilă complexă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu ajutorul a două funcții reale de câte două variabile reale

$$f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$$

unde

$$u = \Re f : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{este partea reală a lui } f$$

$$v = \Im f : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{este partea imaginară a lui } f.$$

1.3.9 Exemple. a) In cazul funcției

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \bar{z}$$

avem

$$f(x + yi) = x - yi$$

adică

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y.$$

b) In cazul funcției

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2$$

avem

$$f(x + yi) = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

și prin urmare

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

1.3.10 Conform definiției, funcția

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$$

este $\mathbb{C}$ -derivabilă în $z_0 = x_0 + y_0i$ dacă și numai dacă există și este finită limita

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Pentru ca

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \alpha + \beta i$$

este necesar ca

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = \alpha + \beta i, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + ti) - f(z_0)}{ti} = \alpha + \beta i$$

adică să aibă loc relațiile

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} i &= \alpha + \beta i \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)}{ti} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)}{ti} i &= \alpha + \beta i \end{aligned}$$

echivalente cu

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \alpha = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \beta = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

În particular, dacă f este $\mathbb{C}$ -derivabilă în $z_0 = x_0 + y_0 i$ atunci

$$f'(x_0 + y_0 i) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) i.$$

1.3.11 Teoremă (Cauchy-Riemann) Funcția

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y) i$$

definită pe mulțimea deschisă $D \subseteq \mathbb{C}$ este $\mathbb{C}$ -derivabilă în punctul $z_0 = x_0 + y_0 i \in D$ dacă și numai dacă funcțiile reale

$$u : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt $\mathbb{R}$ -diferențiabile în (x_0, y_0) și verifică relațiile Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

În aceste condiții

$$f'(x_0 + y_0 i) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) i.$$

Demonstrație. A se vedea [11].

1.3.12 Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă. Spunem că funcția

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este $\mathbb{C}$ -derivabilă (sau *olomorfa*) dacă este $\mathbb{C}$ -derivabilă în orice punct din D .

1.3.13 Exercițiu. Să se arate ca funcția

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2$$

este olomorfă și să se determine $f'(z)$.

Rezolvare. Utilizăm teorema Cauchy-Riemann. Avem

$$f(x + yi) = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

și prin urmare

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Funcțiile u și v sunt $\mathbb{R}$ -diferențiabile în orice punct și

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Derivata lui f este

$$f'(x + yi) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)i = 2x + 2yi$$

adică, $f'(z) = 2z$.

1.3.14 Exercițiu. Să se arate ca funcția

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \bar{z}$$

nu este $\mathbb{C}$ -derivabilă în niciun punct.

Rezolvare. Utilizăm teorema Cauchy-Riemann. Avem

$$f(x + yi) = x - yi$$

adică

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y.$$

În acest caz relațiile Cauchy-Riemann nu sunt verificate în niciun punct deoarece

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -1.$$

1.3.15 Definiție. Funcția

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = e^z$$

unde

$$e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

este numită *funcția exponențială* (complexă).

1.3.16 MATHEMATICA: Exp[x+y\, I], N[Exp[x+y\, I]]

In[1]:=Exp[x+y I]	↦	Out[1]=e ^{x+iy}
In[2]:=ComplexExpand[Exp[x+y I]]	↦	Out[2]=e ^x Cos[y]+i e ^x Sin[y]
In[3]:=Exp[2+3 I]	↦	Out[3]=e ^{2+3 i}
In[4]:=N[Exp[2+3 I]]	↦	Out[4]=-7.31511+1.04274 i
In[5]:=N[Exp[2+3 I], 15]	↦	Out[5]=-7.31511009490110+1.04274365623590 i

1.3.17 Funcția exponențială este o funcție periodică cu perioada 2π

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

și

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

oricare ar fi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.**1.3.18 Exercițiu.** Să se arate ca funcția exponențială

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = e^z$$

este olomorfă și

$$(e^z)' = e^z.$$

Rezolvare. Utilizăm teorema Cauchy-Riemann. Din relația

$$f(x+yi) = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

rezultă că $u(x, y) = e^x \cos y$ și $v(x, y) = e^x \sin y$. Funcțiile reale u și v sunt $\mathbb{R}$ -diferențiabile în orice punct și

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Derivata lui f este

$$f'(z) = f'(x+yi) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)i = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z.$$

1.3.19 Exercițiu. Să se determine funcția olomorfă

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

care îndeplinește condițiile

$$\Im f(x, y) = 2xy + y, \quad f(i) = i.$$

Rezolvare. Căutând funcția f de forma

$$f(x + yi) = u(x, y) + (2xy + y)i$$

din teorema Cauchy-Riemann deducem relațiile

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2y$$

din care rezultă că $u(x, y) = x^2 - y^2 + x + c$, unde c este o constantă. Impunând condiția suplimentară $f(i) = i$ obținem

$$f(x + yi) = x^2 - y^2 + x + 1 + (2xy + y)i = (x + yi)^2 + (x + yi) + 1$$

adică $f(z) = z^2 + z + 1$.

1.3.20 a) Dacă funcțiile $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ sunt olomorfe atunci

$$(\alpha f \pm \beta g)' = \alpha f' \pm \beta g' \quad (fg)' = f'g + fg'$$

oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dacă în plus $g(z) \neq 0$, oricare ar fi $z \in D$, atunci

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

b) Dacă funcțiile $D \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ sunt olomorfe atunci

$$\frac{d}{dz}(g(f(z))) = g'(f(z)) f'(z).$$

1.3.21 MATHEMATICA $D[f[z], z]$

$$\begin{array}{ll} \text{In}[1] := D[a f[z] + b g[z], z] & \mapsto \text{Out}[1] = a f'[z] + b g'[z] \\ \text{In}[2] := D[f[z] g[z], z] & \mapsto \text{Out}[2] = f'[z] g[z] + f[z] g'[z] \\ \text{In}[3] := D[f[z]/g[z], z] & \mapsto \text{Out}[3] = \frac{f'[z]}{g[z]} - \frac{f[z] g'[z]}{g[z]^2} \\ \text{In}[4] := D[g[f[z]], z] & \mapsto \text{Out}[4] = g'[f[z]] f'[z] \end{array}$$

1.3.22 Exercițiu. Funcțiile complexe

$$\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\text{ch} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\text{sh} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

sunt olomorfe și

$$\begin{aligned}
 (\cos z)' &= -\sin z & (\sin z)' &= \cos z \\
 (\operatorname{ch} z)' &= \operatorname{sh} z & (\operatorname{sh} z)' &= \operatorname{ch} z.
 \end{aligned}$$

Rezolvare. Calcul direct.

1.3.23 MATHEMATICA `D[f[z], z]`

<code>In[1]:=D[z^n,z]</code>	$\mapsto$	<code>Out[1]=n z^{-1+n}</code>	<code>In[4]:=D[Exp[z],z]</code>	$\mapsto$	<code>Out[4]=e^z</code>
<code>In[2]:=D[Cos[z],z]</code>	$\mapsto$	<code>Out[2]=-Sin[z]</code>	<code>In[5]:=D[Sin[z],z]</code>	$\mapsto$	<code>Out[5]=Cos[z]</code>
<code>In[3]:=D[Cosh[z],z]</code>	$\mapsto$	<code>Out[3]=Sinh[z]</code>	<code>In[6]:=D[Sinh[z],z]</code>	$\mapsto$	<code>Out[6]=Cosh[z]</code>

1.3.24 MATHEMATICA Figura 1.11 s-a obținut utilizând

```

In[1]:=Plot[{Exp[x], x, Log[x]}, {x, -3, 3}, PlotStyle -> {Red, Dashed, Thick},
          AspectRatio -> Automatic]

```

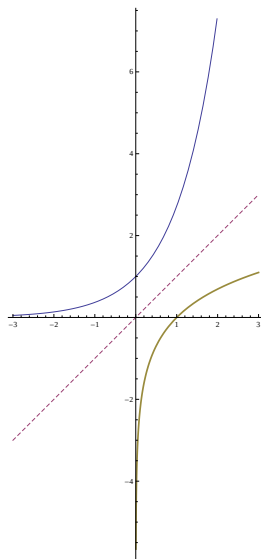


Figura 1.11: Funcția logaritm natural $\ln$ este inversa funcției exponențiale e^x .

1.3.25 Funcția exponențială reală

$$\mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty) : x \mapsto e^x$$

este bijectivă. Inversa ei este funcția logaritm natural

$$(0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln x.$$

Avem

$$x = e^{\ln x}$$

oricare ar fi $x \in (0, \infty)$. În cazul complex, putem obține o relație oarecum similară

$$z = |z| e^{i \arg z} = e^{\ln |z|} e^{i \arg z} = e^{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)}$$

adevărată oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$.

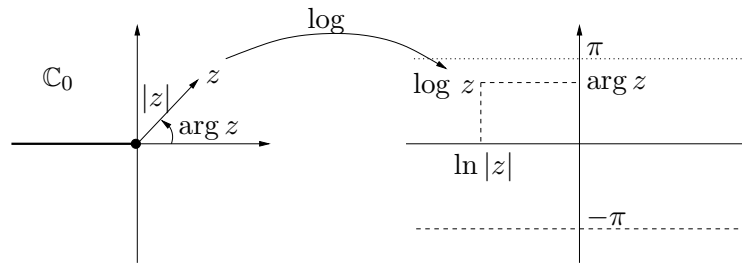


Figura 1.12: Ramura principală $\log z = \ln |z| + i \arg z$.

1.3.26 Definiție. Fie mulțimea

$$\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} - \{ z \mid \Im z = 0, \Re z \leq 0 \}$$

obținută eliminând din $\mathbb{C}$ “tăietura” $\{ z \mid \Im z = 0, \Re z \leq 0 \}$ care unește 0 cu ∞ .

Funcțiile continue

$$\log_k : \mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \log_k z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$$

depinzând de parametrul $k \in \mathbb{Z}$ sunt numite *ramuri uniforme ale funcției logaritmice*.

Pentru *ramura principală* $\log_0$ se utilizează notația $\log$, adică

$$\log : \mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \log z = \ln |z| + i \arg z.$$

1.3.27 MATHEMATICA ComplexExpand[Log[x+I y]]

```
In[1]:=ComplexExpand[Log[x+I y]]      ↳ Out[1]=i Arg[x+iy]+1/2 Log[x^2+y^2]
In[2]:=ComplexExpand[Log[1+I]]        ↳ Out[2]=i pi/4+Log[2]/2
In[3]:=N[ComplexExpand[Log[1+I]]]     ↳ Out[3]=0.346574+0.785398 i
In[4]:=N[ComplexExpand[Log[1+I]],10]  ↳ Out[4]=0.3465735903+0.7853981634 i
```

1.3.28 Deoarece, la nivelul tăieturii $\{ z \mid \Im z = 0, \Re z \leq 0 \}$ avem

$$\lim_{t \nearrow 0} \log(-2 + ti) = \ln 2 - i\pi \quad \text{și} \quad \lim_{t \searrow 0} \log(-2 + ti) = \ln 2 + i\pi$$

funcția $\log$ nu poate fi prelungită prin continuitate în punctele tăieturii.

1.3.29 MATHEMATICA Limit[Log[-2 + t I], t -> 0, Direction -> 1]

In[1]:=Limit[Log[-2 + t I], t -> 0, Direction -> 1] $\mapsto$ Out[1]=-i π +Log[2]

In[2]:=Limit[Log[-2 + t I], t -> 0, Direction -> -1] $\mapsto$ Out[2]=i π +Log[2]

Exercițiu. Să se arate că

$$(\log_k z)' = \frac{1}{z}.$$

Rezolvare. Notând $f(z) = \log_k z = u(x, y) + i v(x, y)$ obținem

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

și prin urmare

$$f'(x + yi) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+yi}.$$

1.3.30 Ramurile uniforme ale funcției putere z^α cu exponent complex α sunt

$$\mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^\alpha = e^{\alpha \log_k z}.$$

In cazul $\alpha = \frac{1}{n}$ cu $n \in \mathbb{N}^*$ există doar n ramuri uniforme distincte

$$\mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log_k z} = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{i}{n} (\arg z + 2k\pi)}$$

de exemplu, cele corespunzătoare lui $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

1.3.31 MATHEMATICA ComplexExpand[Sqrt[x+I y]]

In[1]:=ComplexExpand[Sqrt[x+I y]]

$\mapsto$ Out[1]=(x²+y²)^{1/4}Cos[$\frac{1}{2}$ Arg[x+iy]]+i(x²+y²)^{1/4}Sin[$\frac{1}{2}$ Arg[x+iy]]

In[2]:=ComplexExpand[Sqrt[1+I]] $\mapsto$ Out[2]=2^{1/2}Cos[$\frac{\pi}{8}$]+i 2^{1/2}Sin[$\frac{\pi}{8}$]

In[3]:=N[ComplexExpand[Sqrt[1+I]], 10] $\mapsto$ Out[3]=1.098684113+0.4550898606 i

In[4]:=Limit[Sqrt[-1 + I x], x -> 0, Direction -> 1] $\mapsto$ Out[4]=-i

In[5]:=Limit[Sqrt[-1 + I x], x -> 0, Direction -> -1] $\mapsto$ Out[5]=i

1.3.32 MATHEMATICA ComplexExpand[(x + I y)^(1/n)]

In[1]:=ComplexExpand[(x + I y)^(1/3)]

$\mapsto$ Out[1]=(x²+y²) ^{$\frac{1}{2n}$} Cos[$\frac{\text{Arg}[x+iy]}{n}$]+i(x²+y²) ^{$\frac{1}{2n}$} Sin[$\frac{\text{Arg}[x+iy]}{n}$]]

1.3.33 Exercițiu. Să se descrie ramura uniformă a funcției

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{z}{i-z}} \quad \text{cu} \quad f(1) = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} e^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

Rezolvare. Pentru ca

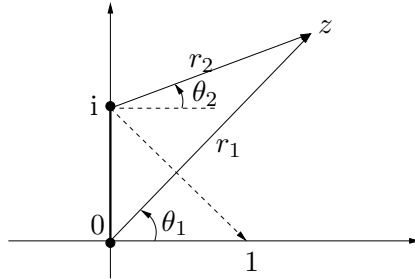


Figura 1.13: Relația $z = r_1 e^{i\theta_1} = i + r_2 e^{i\theta_2}$.

$$\frac{z}{i - z} \in \mathbb{C}_0$$

este necesar și suficient ca z să aparțină domeniului

$$D = \mathbb{C} \setminus [0, i] = \mathbb{C} \setminus \{ z \mid \Re z = 0, \ 0 \leq \Im z \leq 1 \}$$

obținut eliminând din $\mathbb{C}$ “tăietura” $[0, i]$. Notând

$$z = r_1 e^{i\theta_1} = i + r_2 e^{i\theta_2}$$

deducem că $i - z = -r_2 e^{i\theta_2} = r_2 e^{i(\theta_2 + \pi)}$ și

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{r_1}{r_2}} e^{i \frac{\theta_1 - \theta_2 - \pi + 2k\pi}{3}}.$$

Din $1 = e^{i0} = i + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ rezultă $k = 1$ și prin urmare

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{r_1}{r_2}} e^{i \frac{\theta_1 - \theta_2 + \pi}{3}}.$$

1.4 Integrala complexă

1.4.1 Propoziție. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$. Aplicația

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D, \quad \gamma(t) = \varphi(t) + \psi(t)i$$

este continuă dacă și numai dacă aplicațiile reale

$$\varphi = \Re \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi = \Im \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt continue.

Demonstrație. Afirmația rezultă din relația

$$\left. \begin{array}{l} |\varphi(t) - \varphi(t_0)| \\ |\psi(t) - \psi(t_0)| \end{array} \right\} \leq |\gamma(t) - \gamma(t_0)| \leq |\varphi(t) - \varphi(t_0)| + |\psi(t) - \psi(t_0)|.$$

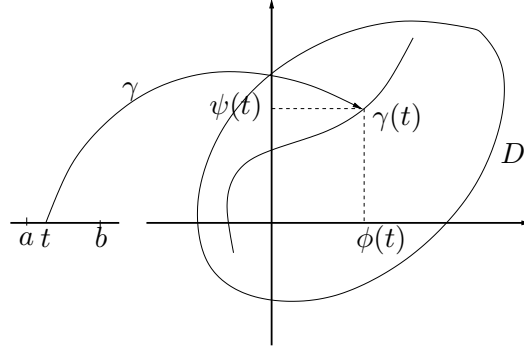


Figura 1.14: Drum de clasă C^1 în D .

1.4.2 Definiție. Spunem că aplicația

$$\gamma : (a, b) \longrightarrow D$$

este *derivabilă* în punctul $t_0 \in (a, b)$ dacă există și este finită limita

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}.$$

Spunem că γ este *aplicație derivabilă* dacă este derivabilă în orice punct.

1.4.3 În cazul unei aplicații

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

prin $\gamma'(a)$ și $\gamma'(b)$ vom înțelege derivatele laterale

$$\gamma'(a) = \lim_{t \searrow a} \frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t - a}, \quad \gamma'(b) = \lim_{t \nearrow b} \frac{\gamma(t) - \gamma(b)}{t - b}.$$

1.4.4 Propoziție. *Aplicația*

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D, \quad \gamma(t) = \varphi(t) + \psi(t)i$$

este derivabilă dacă și numai dacă aplicațiile reale

$$\varphi = \Re \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi = \Im \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt derivabile și

$$\gamma'(t) = \varphi'(t) + \psi'(t)i.$$

Demonstrație. Avem

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} i.$$

1.4.5 Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$. Un *drum de clasă* C^1 în D este o aplicație derivabilă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

cu derivata $\gamma' : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continuă.

1.4.6 Exemple.

a) Oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$ aplicația constantă

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z$$

este drum de clasă C^1 în $\mathbb{C}$ (numit *drum punctual*).

b) Oricare ar fi numerele complexe z_1 și z_2 aplicația

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = (1 - t)z_1 + tz_2$$

este drum de clasă C^1 în $\mathbb{C}$ (*drumul liniar* ce leagă z_1 cu z_2).

c) Oricare ar fi $z_0 = x_0 + y_0i \in \mathbb{C}$ și $r > 0$ aplicația

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + re^{it} = x_0 + r \cos t + (y_0 + r \sin t)i$$

este drum de clasă C^1 în $\mathbb{C}$ (numit *drum circular* de rază r și centru z_0).

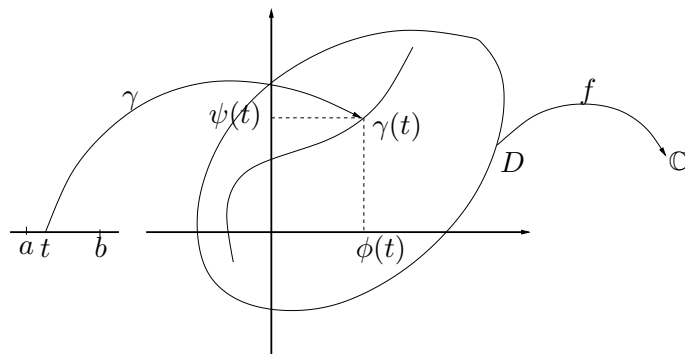


Figura 1.15: Integrala complexă.

1.4.7 Definiție. Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcție continuă și $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ un drum de clasă C^1 în D . Prin *integrala complexă* a funcției f de-a lungul drumului γ (a se vedea Figura 1.16) se înțelege numărul

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

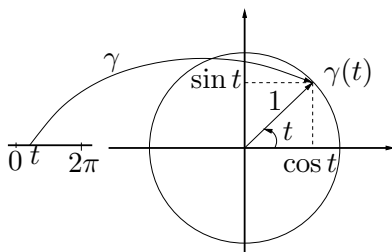


Figura 1.16: Drumul $\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$.

1.4.8 Exercițiu. Fie funcția

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z}$$

unde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ și drumul de clasă C^1

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad \gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Să se calculeze

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Rezolvare. Deoarece $f(\gamma(t)) = \frac{1}{\gamma(t)} = e^{-it}$ și $\gamma'(t) = ie^{it}$ obținem

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = 2\pi i.$$

1.4.9 În cazul unui drum punctual $\gamma(t) = z$ avem $\gamma'(t) = 0$ și prin urmare

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

oricare ar fi funcția f .

1.4.10 Dacă $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ și $\gamma(t) = \varphi(t) + \psi(t)i$ atunci

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b [u(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) - v(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt \\ &\quad + i \int_a^b [u(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) + v(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t)] dt. \end{aligned}$$

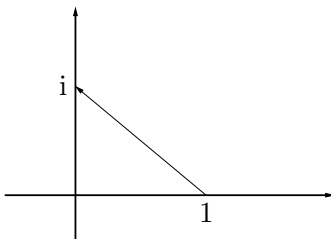


Figura 1.17: Drumul liniar ce leagă 1 cu i.

1.4.11 Exercițiu. Calculați

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz$$

unde γ este drumul liniar ce leagă $z_1 = 1$ cu $z_2 = i$.

Rezolvare. Deoarece

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = (1-t)1 + ti$$

avem relațiile $f(\gamma(t)) = \overline{\gamma(t)} = 1-t-ti$ și $\gamma'(t) = -1+i$ din care rezultă

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^1 (1-t-ti)(-1+i)dt = \int_0^1 (-1+2t)dt + i \int_0^1 dt = i.$$

1.4.12 MATHEMATICA: Integrala pe un drum poligonal

```
In[1]:=Integrate[Conjugate[z], {z, 1, I}]    ↳ Out[1]=i
In[2]:=Integrate[1/z, {z, 1, I, -1, -I, 1}] ↳ Out[2]=2 i π
```

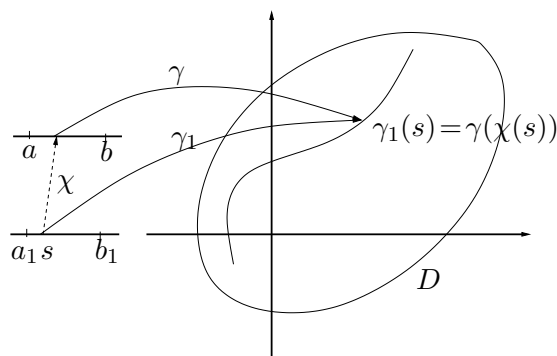


Figura 1.18: Drumuri echivalente.

1.4.13 Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o submulțime. Spunem că drumurile de clasă C^1

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D \quad \text{și} \quad \gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow D$$

sunt *echivalente* dacă există o aplicație bijectivă derivabilă strict crescătoare

$$\chi : [a_1, b_1] \longrightarrow [a, b]$$

astfel încât

$$\gamma_1(s) = \gamma(\chi(s)), \quad \text{oricare ar fi } s \in [a_1, b_1].$$

1.4.14 Relația definită este o relație de echivalență care permite împărțirea mulțimii drumurilor în clase de echivalență. Fiecare clasă de echivalență corespunde unei *curbe*, elementele clasei fiind numite *parametrizări* ale curbei considerate.

1.4.15 Propoziție. *Dacă*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcție continuă și dacă drumurile de clasă C^1

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D, \quad \gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow D$$

sunt echivalente atunci

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

adică valoarea integralei depinde de curba aleasă și nu de parametrizarea utilizată.

Demonstrație. Folosind metoda schimbării de variabilă obținem

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(s)) \gamma_1'(s) ds \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(\chi(s))) \gamma'(\chi(s)) \chi'(s) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz. \end{aligned}$$

1.4.16 Orice drum

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

este echivalent cu un drum definit pe $[0, 1]$ și anume

$$\gamma_0 : [0, 1] \longrightarrow D, \quad \gamma_0(t) = \gamma((1-t)a + tb).$$

1.4.17 Definiție. Fie $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ un drum de clasă C^1 . Drumul

$$\tilde{\gamma} : [a, b] \longrightarrow D, \quad \tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$$

se numește *inversul* drumului γ .

1.4.18 Propoziție. Dacă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcție continuă și

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

un drum de clasă C^1 în D atunci

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Demonstrație. Utilizând schimbarea de variabilă $s = a + b - t$ obținem

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz &= \int_a^b f(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'(t) dt = - \int_a^b f(\gamma(a + b - t)) \gamma'(a + b - t) dt \\ &= \int_b^a f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = - \int_{\gamma} f(z) dz. \end{aligned}$$

1.4.19 Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$. Prin drum de clasă C^1 pe porțiuni în D se înțelege o aplicație continuă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

cu proprietatea că există o diviziune $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ astfel încât

- 1) restricțiile $\gamma|_{(t_{i-1}, t_i)}$ sunt derivabile și cu derivata continuă
- 2) există și sunt finite limitele

$$\lim_{t \searrow a} \gamma'(t), \quad \lim_{t \searrow t_j} \gamma'(t), \quad \lim_{t \nearrow t_j} \gamma'(t), \quad \lim_{t \nearrow b} \gamma'(t)$$

oricare ar fi $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

1.4.20 Drumul considerat este format din drumurile de clasă C^1

$$\gamma_1 : [t_0, t_1] \longrightarrow D, \quad \gamma_1 = \gamma|_{[t_0, t_1]}$$

$$\gamma_2 : [t_1, t_2] \longrightarrow D, \quad \gamma_2 = \gamma|_{[t_1, t_2]}$$

.....

$$\gamma_n : [t_{n-1}, t_n] \longrightarrow D, \quad \gamma_n = \gamma|_{[t_{n-1}, t_n]}$$

și pentru orice funcție continuă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

definim *integrala complexă* a funcției f de-a lungul drumului γ ca fiind

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Toate drumurile pe care le vom considera în continuare vor fi drumuri de clasă C^1 pe porțiuni și le numim simplu drumuri.

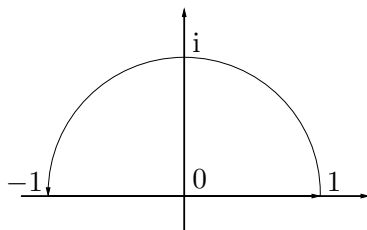


Figura 1.19: Drum de clasă C^1 pe porțiuni.

1.4.21 Exemplu. Aplicația (a se vedea Figura 1.19)

$$\gamma : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = \begin{cases} e^{\pi it} & \text{dacă } t \in [0, 1] \\ 2t - 3 & \text{dacă } t \in (1, 2] \end{cases}$$

este drum de clasă C^1 pe porțiuni în $\mathbb{C}$ și pentru orice funcție continuă

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

avem

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 f(e^{\pi it}) \pi i e^{\pi it} dt + \int_1^2 f(2t - 3) 2 dt.$$

1.4.22 Primitivele unor funcții reale de variabilă reală $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

(I este un interval inclus în domeniul maxim de derivabilitate al primitivelor)

Funcția	Mulțimea primitivelor	Intervalul	Condiții
$f(x) = 1$	$\int dx = x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = x^n$	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
$f(x) = x^\alpha$	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + \mathcal{C}$	$I \subseteq (0, \infty)$	$\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R} - \{0\}$	
$f(x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = a^x$	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	$0 < a \neq 1$
$f(x) = \sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R} - (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi)$	
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{Z}\pi$	
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C}$	$I \subseteq (-a, a)$	$a \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln x + \sqrt{x^2 - a^2} + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R} - [-a, a]$	$a > 0$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	$a \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$	$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	$a \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R} - \{\pm a\}$	$a \neq 0$
$f(x) = \operatorname{sh} x$	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = \operatorname{ch} x$	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + \mathcal{C}$	$I \subseteq \mathbb{R}$	

1.4.23 Definiție. Spunem că funcția

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

definită pe o mulțime deschisă D admite primitivă în D dacă există

$$g : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

funcție olomorfă cu proprietatea

$$g'(z) = f(z), \quad \text{oricare ar fi } z \in D.$$

1.4.24 Exemple.

a) Dacă $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ atunci funcția

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^k = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{k \text{ ori}}$$

admite în $\mathbb{C}$ primitiva

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{z^{k+1}}{k+1}$$

deoarece

$$\left(\frac{z^{k+1}}{k+1}\right)' = z^k, \quad \text{oricare ar fi } z \in \mathbb{C}.$$

b) Dacă $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$ atunci funcția

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^{-k} = \frac{1}{z^k}$$

admite în $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ primitiva

$$g : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{z^{1-k}}{1-k} = -\frac{1}{(k-1)z^{k-1}}$$

deoarece

$$\left(\frac{z^{1-k}}{1-k}\right)' = z^{-k}, \quad \text{oricare ar fi } z \in \mathbb{C}^*.$$

c) Funcția exponențială

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = e^z$$

admite în $\mathbb{C}$ primitiva

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = e^z$$

deoarece

$$(e^z)' = e^z, \quad \text{oricare ar fi } z \in \mathbb{C}.$$

d) Funcția

$$\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \cos z$$

admite în $\mathbb{C}$ primitiva

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \sin z$$

deoarece

$$(\sin z)' = \cos z, \quad \text{oricare ar fi } z \in \mathbb{C}.$$

e) Funcția

$$\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \sin z$$

admite în $\mathbb{C}$ primitiva

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = -\cos z$$

deoarece

$$(-\cos z)' = \sin z, \quad \text{oricare ar fi } z \in \mathbb{C}.$$

1.4.25 Propoziție. Dacă funcția continuă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

admite în D o primitivă

$$g : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

și dacă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

este un drum conținut în D atunci

$$\int_{\gamma} f(z) dz = g(z) \Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

Demonstrație. Utilizând formula de schimbare de variabilă obținem

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b g'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} g(\gamma(t)) dt = g(\gamma(t)) \Big|_{t=a}^{t=b} = g(z) \Big|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)}. \end{aligned}$$

1.4.26 Din propoziția anterioară rezultă că în cazul în care funcția

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

admite primitivă în D , integrala pe un drum

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

conținut în D depinde doar de capetele $\gamma(a)$ și $\gamma(b)$ ale drumului. Dacă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D, \quad \gamma_1 : [a, b] \longrightarrow D$$

sunt două drumuri în D astfel încât $\gamma(a) = \gamma_1(a)$ și $\gamma(b) = \gamma_1(b)$ atunci

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

1.4.27 Exercițiu. Să se calculeze integralele

$$\int_{\gamma} z^3 dz, \quad \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz, \quad \int_{\gamma} e^z dz, \quad \int_{\gamma} \left(2z^3 + \frac{5}{z^2} - e^z \right) dz$$

γ fiind un drum în $\mathbb{C}^*$ cu originea $z_1 = 1$ și extremitatea $z_2 = i$ (Figura 1.20).

Rezolvare. Fie $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un drum cu originea $z_1 = 1$ și extremitatea $z_2 = i$, adică astfel încât $\gamma(a) = 1$ și $\gamma(b) = i$. Avem

$$\int_{\gamma} z^3 dz = \frac{z^4}{4} \Big|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)} = \frac{z^4}{4} \Big|_{z=1}^{z=i} = \frac{i^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 0,$$

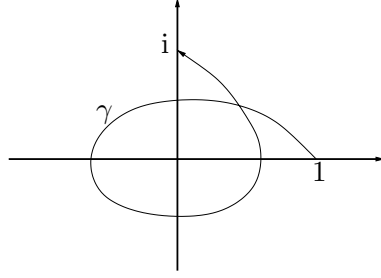


Figura 1.20: Drumul γ cu originea 1 și extremitatea i.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz &= -\frac{1}{z} \Big|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)} = -\frac{1}{z} \Big|_{z=1}^{z=i} = -\frac{1}{i} + 1 = 1 + i, \\ \int_{\gamma} e^z dz &= e^z \Big|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)} = e^z \Big|_{z=1}^{z=i} = e^i - e = \cos 1 + i \sin 1 - e, \\ \int_{\gamma} (2z^3 + \frac{5}{z^2} - e^z) dz &= 2 \int_{\gamma} z^3 dz + 5 \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz - \int_{\gamma} e^z dz \\ &= 5 + e - \cos 1 + (5 - \sin 1)i.\end{aligned}$$

1.4.28 Definiție. Spunem că γ este *drum închis* dacă

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

adică *originea* $\gamma(a)$ și *extremitatea* $\gamma(b)$ coincid.

1.4.29 Propoziție. Dacă funcția continuă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

admite în D o primitivă

$$g : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

și dacă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

este un drum închis conținut în D atunci

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Demonstrație. Deoarece $\gamma(a) = \gamma(b)$ avem

$$\int_{\gamma} f(z) dz = g(z) \Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = 0.$$

1.4.30 Exercițiu. Fie drumul circular

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

a) Să se arate că dacă $k \in \mathbb{Z} - \{-1\} = \{\dots, -3, -2, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ atunci

$$\int_{\gamma} z^k dz = 0$$

dar

$$\int_{\gamma} z^{-1} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

b) Să se arate că

$$\int_{\gamma} \left(\frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \right) dz = 2\pi i a_{-1}$$

oricare ar fi numerele $a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.

Rezolvare. a) Drumul γ este conținut în mulțimea deschisă $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ și funcția

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^k$$

admite în $\mathbb{C}^*$ primitiva

$$g : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{z^{k+1}}{k+1}$$

oricare ar fi $k \in \mathbb{Z} - \{-1\}$.

b) Utilizând direct definiția integralei complexe obținem

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

1.4.31 Din exercițiul anterior rezultă că funcția olomorfă

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z}$$

nu admite primitivă în $\mathbb{C}^*$.

1.4.32 Exercițiu. Fie drumul circular

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + r e^{it}$$

a) Să se arate că dacă $k \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ atunci

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^k dz = 0$$

dar

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^{-1} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i.$$

b) Să se arate că

$$\int_{\gamma} \left(\frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 \right) dz = 2\pi i a_{-1}$$

oricare ar fi numerele $a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.

Rezolvare. a) Drumul γ este conținut în mulțimea deschisă $\mathbb{C} - \{z_0\}$ și funcția

$$f : \mathbb{C} - \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = (z - z_0)^k$$

admite în $\mathbb{C}^*$ primitiva

$$g : \mathbb{C} - \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{(z - z_0)^{k+1}}{k+1}$$

oricare ar fi $k \in \mathbb{Z} - \{-1\}$.

b) Utilizând direct definiția integralei complexe obținem

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t) - z_0} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} i r e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

1.4.33 Din exercițiul anterior rezultă că funcția olomorfă

$$f : \mathbb{C} - \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = (z - z_0)^{-1} = \frac{1}{z - z_0}$$

nu admite primitivă în $\mathbb{C} - \{z_0\}$.

1.4.34 Definiție. Spunem că mulțimea $D \subseteq \mathbb{C}$ este *conexă* (prin drumuri) dacă oricare ar fi punctele z_1, z_2 din D există un drum conținut în D cu originea z_1 și extremitatea z_2 . O mulțime deschisă și conexă este numită *domeniu*.

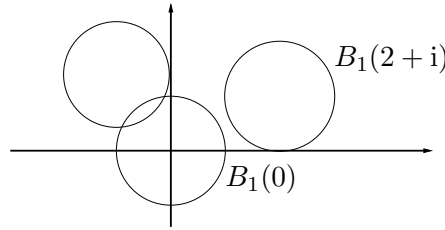


Figura 1.21: Discurile $B_1(0)$, $B_1(2 + i)$ și $B_1(-1 + i\sqrt{2})$.

1.4.35 Exemplu. Mulțimea $B_1(0) \cup B_1(-1 + i\sqrt{2})$ este domeniu dar $B_1(0) \cup B_1(2 + i)$ nu este domeniu (a se vedea Figura 1.21).

1.4.36 Știm că orice drum $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ este echivalent cu drumul

$$[0, 1] \rightarrow D : t \mapsto \gamma((1-t)a + tb).$$

Fără a reduce generalitatea, putem utiliza doar drumuri definite pe intervalul $[0, 1]$.

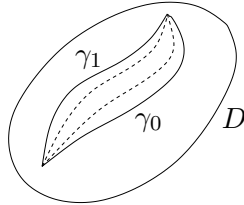


Figura 1.22: Drumuri omotope în domeniul D .

1.4.37 Definiție. Spunem că drumurile cu aceleași extremități γ_0 și γ_1 sunt *omotope în domeniul D* dacă sunt conținute în D și se pot deforma continuu unul în celălalt fără a ieși din D , adică dacă există o aplicație continuă

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D : (s, t) \mapsto h(s, t)$$

astfel încât următoarele condiții să fie îndeplinite

- a) $h(0, t) = \gamma_0(t)$, oricare ar fi $t \in [0, 1]$,
- b) $h(1, t) = \gamma_1(t)$, oricare ar fi $t \in [0, 1]$,
- c) $h(s, 0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, oricare ar fi $s \in [0, 1]$,
- d) $h(s, 1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, oricare ar fi $s \in [0, 1]$.

1.4.38 Exemplu. Drumurile $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\gamma_0(t) = e^{2\pi it}, \quad \gamma_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2\pi it}$$

sunt omotope în $D = \mathbb{C} - \bar{B}_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{2})$. În acest caz putem alege (a se vedea Figura 1.23)

$$h(s, t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t).$$

1.4.39 În continuare, pentru a decide dacă două drumuri sunt omotope în raport cu anumit domeniu ne vom rezuma la a analiza vizual figura (!).

1.4.40 Exemplu. Drumul circular

$$\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_0(t) = 3e^{2\pi it} = 3\cos 2\pi t + 3i\sin 2\pi t$$

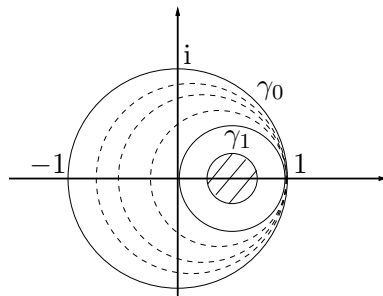


Figura 1.23: Drumuri omotope.

este omotop în $\mathbb{C}^*$ cu drumul eliptic

$$\gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = 3 \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$$

dar cele două drumuri nu sunt omotope în $D = \mathbb{C} - \{2i\}$ (a se vedea Figura 1.24).

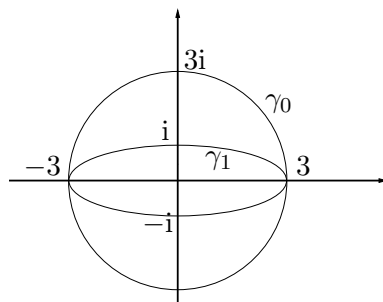


Figura 1.24: Drum circular omotop cu unul eliptic.

1.4.41 Exemplu. Drumurile $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\gamma_0(t) = 1 - 2t, \quad \gamma_1(t) = e^{\pi i t}$$

sunt omotope în $\mathbb{C}$, dar nu sunt omotope în $\mathbb{C} - \{\frac{1}{2}i\}$ (a se vedea Figura 1.25).

1.4.42 Definiție. Spunem că drumul închis

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

este *omotop cu zero în D* dacă el este omotop în D cu drumul punctual

$$[a, b] \longrightarrow D : t \mapsto \gamma(a).$$

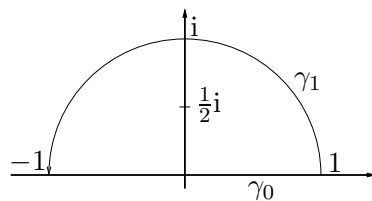


Figura 1.25: Drumurile $\gamma_0(t) = 1 - 2t$ și $\gamma_1(t) = e^{\pi it}$.

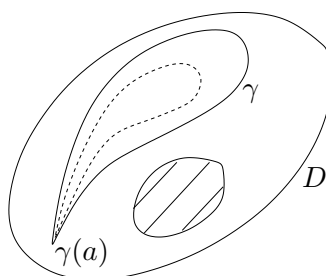


Figura 1.26: Drum omotop cu zero în D .

1.4.43 Exemplu. Drumul circular

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = e^{2\pi it}$$

este omotop cu zero în $D = \mathbb{C} - \{2i\}$, dar nu este omotop cu zero în $\mathbb{C}^*$.

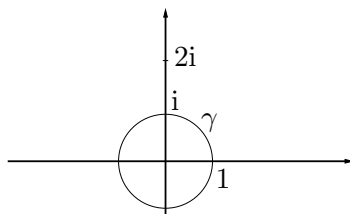


Figura 1.27: Drumul $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{2\pi it}$.

1.4.44 Teoremă (Cauchy) Dacă $D \subseteq \mathbb{C}$ este o mulțime deschisă,

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcție olomorfă și

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

este un drum închis omotop cu zero în D atunci

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

O demonstrație poate fi găsită în [11].

1.4.45 Propoziție. Dacă $D \subseteq \mathbb{C}$ este o mulțime deschisă,

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcție olomorfă și

$$\gamma_0 : [a, b] \longrightarrow D, \quad \gamma_1 : [a, b] \longrightarrow D$$

sunt două drumuri omotope în D atunci

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz. \quad (1.1)$$

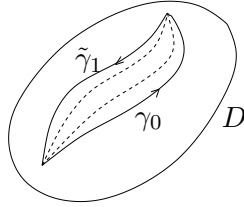


Figura 1.28: Drumurile γ_0 și $\tilde{\gamma}_1$ formează un drum închis.

Demonstrație. Drumul obținut compunând γ_0 cu inversul $\tilde{\gamma}_1$ al drumului γ_1 este un drum închis omotop cu zero în D . Utilizând teorema Cauchy obținem relația

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz + \int_{\tilde{\gamma}_1} f(z) dz = 0.$$

echivalentă cu (1.1).

1.4.46 Fie k un număr întreg pozitiv. Drumul

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + e^{2k\pi it}$$

se rotește de k ori în jurul lui z_0 în sens direct și

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = k.$$

Drumul

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + e^{-2k\pi it}$$

se rotește de k ori în jurul lui z_0 în sens invers și

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = -k.$$

Drumul γ din Figura 1.29 este omotop în $\mathbb{C} - \{z_0\}$ cu drumul

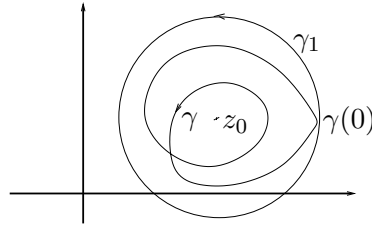


Figura 1.29: Drumul γ are indexul 2 față de z_0 .

$$\gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = z_0 + re^{4\pi i t}$$

și prin urmare

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z - z_0} dz = 2.$$

În general, dacă γ este un drum închis care nu trece prin z_0 numărul

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$$

numit *indexul* lui γ față de z_0 , ne arată de câte ori se rotește γ în jurul lui z_0 .

O demonstrație poate fi găsită în [11].

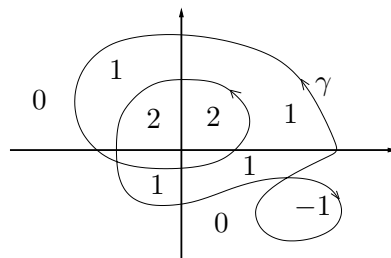


Figura 1.30: Indexul drumului γ față de punctele nesituate pe γ .

1.4.47 Un drum închis γ determină o partiție a mulțimii punctelor nesituate pe γ formată din submulțimi conexe. Toate punctele aparținând unei componente conexe au același index față de γ (a se vedea Figura 1.30).

1.4.48 Teoremă. (Formulele lui Cauchy) *Orice funcție olomorfă*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

definită pe o mulțime deschisă D este nelimitat derivabilă și oricare ar fi drumul

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow D$$

omotop cu zero în D are loc formula

$$n(\gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$ și orice $z \in D - \{ \gamma(t) \mid t \in [0, 1] \}$.

O demonstrație poate fi găsită în [11].

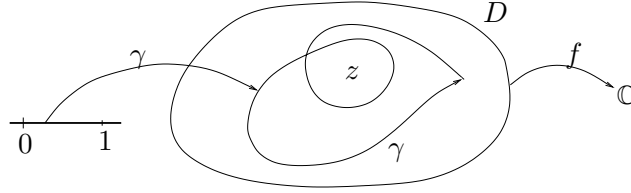


Figura 1.31: Valoarea derivatei $f^{(k)}$ într-un punct z verifică formula lui Cauchy.

1.5 Serii Laurent

1.5.1 Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o submulțime și

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$$

funcții definite pe D . Spunem că seria de funcții complexe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

este *convergentă* (*uniform convergentă*) dacă șirul sumelor parțiale $(s_k)_{k \geq 0}$, unde

$$s_k = \sum_{n=0}^k f_n$$

este convergent (respectiv, uniform convergent). Limita acestui șir

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k f_n = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_0 + f_1 + \cdots + f_k)$$

se numește *suma seriei*. Spunem că seria considerată este *absolut convergentă* dacă seria de funcții reale

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$$

este convergentă.

1.5.2 Propoziție. Dacă $|z| < 1$ atunci seria geometrică

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

este convergentă și suma ei este $\frac{1}{1-z}$, adică

$$|z| < 1 \quad \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Demonstrație. Dacă $|z| < 1$ atunci

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k z^n = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + z + z^2 + \dots + z^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

1.5.3 Teoremă. (Weierstrass) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o submulțime și

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$$

funcții definite pe D . Dacă există o serie convergentă de numere reale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$$

astfel încât

$$|f_n(z)| \leq \alpha_n, \quad \text{oricare ar fi } z \in D, n \in \mathbb{N}$$

atunci seria de funcții complexe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

este absolut și uniform convergentă.

1.5.4 Definiție. Prin *serie de puteri* în jurul lui z_0 se înțelege o serie de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

cu coeficienții $a_0, a_1, a_2, \dots$ numere complexe. Ea mai poate fi scrisă și sub forma

$$a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

1.5.5 Orice serie de puteri este o serie de funcții

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

în care funcțiile f_n au forma particulară

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f_n(z) = a_n (z - z_0)^n.$$

1.5.6 Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$$

funcții definite pe D . Spunem că șirul de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniform pe compacte la f dacă oricare ar fi mulțimea compactă $K \subset D$, șirul restricțiilor $f_n|_K$ converge uniform la $f|_K$.

1.5.7 Teoremă (Weierstrass). Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$$

funcții definite pe D . Dacă funcțiile f_n sunt olomorfe și dacă șirul $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniform pe compacte la f atunci f este funcție olomorfă și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)} = f^{(k)}, \quad \text{oricare ar fi } k \in \mathbb{N}.$$

O demonstrație poate fi găsită în [11].

1.5.8 Teoremă (Weierstrass). Dacă seria de funcții olomorfe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

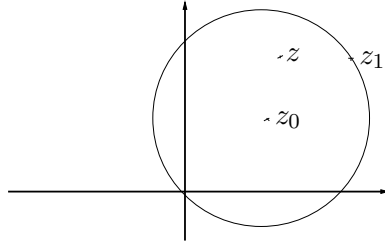
converge uniform pe compacte în mulțimea deschisă D atunci suma ei

$$S : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

este o funcție olomorfă și

$$S^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}, \quad \text{oricare ar fi } k \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație. Afirmția rezultă direct din teorema precedentă.

Figura 1.32: Discul de centru z_0 și rază $|z_1 - z_0|$.**1.5.9 Teoremă (Abel).** *Dacă seria de puteri*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

este convergentă pentru $z = z_1 \neq z_0$ atunci ea este convergentă în discul

$$\{ z \mid |z - z_0| < |z_1 - z_0| \}$$

de centru z_0 și rază $|z_1 - z_0|$.

Demonstrație. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$ fiind convergentă avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n (z_1 - z_0)^n = 0$$

și prin urmare există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|a_n (z_1 - z_0)^n| < 1, \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_0$$

adică

$$|a_n| < \frac{1}{|z_1 - z_0|^n}, \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_0.$$

Din relația

$$|a_n (z - z_0)^n| < \left(\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} \right)^n, \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_0$$

și convergența seriei geometrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} \right)^n$$

pentru $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ rezultă conform criteriului comparației convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z - z_0)^n|$. Spațiul normat $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ fiind complet, orice serie absolut convergentă este convergentă.

1.5.10 Fie seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Pentru z astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} < 1$$

adică astfel încât

$$|z - z_0| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

seria considerată este absolut convergentă conform criteriului rădăcinii.

1.5.11 Teoremă (Cauchy-Hadamard). *In cazul unei serii de puteri*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

există

$$R = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{dacă } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \notin \{0, \infty\} \\ \infty & \text{dacă } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$$

(numit raza de convergență) astfel încât :

a) In discul (numit disc de convergență)

$$B_R(z_0) = \{ z \mid |z - z_0| < R \}$$

seria converge absolut și uniform pe compacte.

b) In $\mathbb{C} - \bar{B}_R(z_0) = \{ z \mid |z - z_0| > R \}$ seria este divergentă.

c) Suma seriei

$$S : B_R(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

este funcție olomorfă.

d) Seria derivată este o serie de puteri cu aceeași rază de convergență și

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \quad \text{oricare ar fi } z \in B_R(z_0).$$

O demonstrație poate fi găsită în [11].

1.5.12 Se poate arăta că dacă există limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

atunci

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

1.5.13 Exemple.

a) Raza de convergență a seriei geometrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

este $R = 1$ deoarece în acest caz $a_n = 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

b) Raza de convergență a seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

este $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$.

1.5.14 Admițând că f este suma unei serii de puteri în jurul lui z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

cu raza de convergență nenulă, din teorema Cauchy-Hadamard rezultă relația

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n (z - z_0)^n]^{(k)}, \quad \text{oricare ar fi } k \in \mathbb{N}$$

care conduce la

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

1.5.15 Teoremă (Dezvoltarea în serie Taylor) *Dacă funcția*

$$f : B_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$$

este olomorfă în discul $B_r(z_0)$ și R este raza de convergență a seriei Taylor asociate

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

atunci $R \geq r$ și

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\ &= f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

oricare ar fi $z \in B_r(z_0)$.

O demonstrație poate fi găsită în [11].

1.5.16 Exemplu. Din teorema dezvoltării în serie Taylor rezultă dezvoltările

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots \quad \text{pentru } |z| < 1$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \quad \text{pentru orice } z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \quad \text{pentru orice } z \in \mathbb{C}.$$

Din aceste dezvoltări, prin substituție și/sau derivare putem obține alte dezvoltări

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - \dots \quad \text{pentru } |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} = 1 + 2z + 3z^2 + \dots \quad \text{pentru } |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n (-1)^{n-1} z^{n-1} = 1 - 2z + 3z^2 - \dots \quad \text{pentru } |z| < 1$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \quad \text{pentru orice } z \in \mathbb{C}.$$

1.5.17 MATHEMATICA: Series[f[z], {z, z₀, n}]

```
In[1]:=Series[1/(1-z), {z, 0, 5}]  ↳ Out[1]=1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+O[z]^6
In[2]:=Series[Exp[z], {z, 0, 6}]   ↳ Out[2]=1+z+z^2/2+z^3/6+z^4/24+z^5/120+z^6/720+O[z]^7
In[3]:=Series[Exp[z], {z, 1, 3}]   ↳ Out[3]=e+e(z-1)+1/2 e(z-1)^2+1/6 e(z-1)^3+O[z-1]^4
In[4]:=Series[Exp[z], {z, I, 3}]   ↳ Out[4]=e^i+e^i(z-i)+1/2 e^i(z-i)^2+1/6 e^i(z-i)^3+O[z-i]^4
In[5]:=Series[Cos[z], {z, 0, 6}]   ↳ Out[5]=1-z^2/2+z^4/24-z^6/720+O[z]^7
```

1.5.18 Definiție. Prin *serie Laurent* în jurul lui z_0 se înțelege o serie de forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

cu coeficienții a_n numere complexe. Ea mai poate fi scrisă și sub forma

$$\dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

1.5.19 Teoremă (Coroana de convergență). *Fie seria Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$,*

$$r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$$

și

$$R = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{dacă } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \notin \{0, \infty\} \\ \infty & \text{dacă } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Dacă $r < R$ atunci:

a) *In coroana circulară (numită coroana de convergență)*

$$\{ z \mid r < |z - z_0| < R \}$$

seria Laurent converge absolut și uniform pe compacte.

b) *Seria Laurent diverge în $\{ z \mid |z - z_0| < r \} \cup \{ z \mid |z - z_0| > R \}$.*

c) *Suma seriei Laurent $S : D \rightarrow \mathbb{C}$,*

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

este funcție olomorfă.

O demonstrație poate fi găsită în [11].

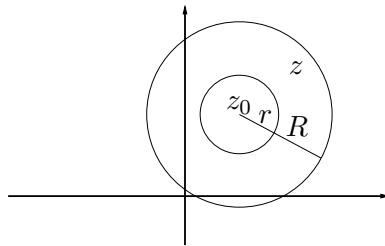


Figura 1.33: Coroana circulară $\{ z \mid r < |z - z_0| < R \}$.

1.5.20 Teoremă (Dezvoltarea în serie Laurent). *Dacă funcția*

$$f : D = \{ z \mid r < |z - z_0| < R \} \rightarrow \mathbb{C}$$

definită pe coroana D este olomorfă atunci există o unică serie Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

cu coroana de convergență incluzând pe D și astfel încât

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{oricare ar fi } z \in D.$$

1.5.21 Exemple.

a) Funcția olomorfă

$$f : D = \{ z \mid 0 < |z| < 1 \} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

admite în coroana D dezvoltarea în serie Laurent în jurul lui 0

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2} (1+z+z^2+\dots) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots \quad (1.2)$$

b) Funcția olomorfă

$$f : D = \{ z \mid 0 < |z-i| < \infty \} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{e^z}{(z-i)^2}$$

admite în coroana D dezvoltarea în serie Laurent în jurul lui i

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^z}{(z-i)^2} = \frac{e^i}{(z-i)^2} e^{z-i} = \frac{e^i}{(z-i)^2} \left(1 + \frac{z-i}{1!} + \frac{(z-i)^2}{2!} + \dots \right) \\ &= \frac{e^i}{(z-i)^2} + \frac{e^i}{z-i} + \frac{e^i}{2!} + \frac{e^i}{3!} (z-i) + \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

c) Funcția olomorfă

$$f : D = \{ z \mid 0 < |z| < \infty \} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$$

admite în coroana D dezvoltarea în serie Laurent în jurul lui 0

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 \left(1 + \frac{1}{1!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots \right) \\ &= \dots + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} z + z^2 + 0 z^3 + 0 z^4 + \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

1.5.22 Definiție. Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcție olomorfă definită pe mulțimea deschisă D . Spunem că punctul $z_0 \in \mathbb{C} - D$ este un *punct singular izolat* al funcției f dacă există $r > 0$ astfel încât coroana circulară $\{ z \mid 0 < |z - z_0| < r \}$ este conținută în D . Coeficientul a_{-1} din dezvoltarea Laurent

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

a lui f în această coroană se numește *reziduul* lui f în punctul singular izolat z_0 și se notează cu **Rez** _{z_0} f , adică

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = a_{-1}.$$

1.5.23 Exemple.

a) Singurul punct singular izolat al funcției

$$f : D = \{ z \mid 0 < |z| < 1 \} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

este $z = 0$ și din (1.2) rezultă că $\mathbf{Rez}_0 f = 1$.

b) Singurul punct singular izolat al funcției

$$f : D = \{ z \mid 0 < |z - i| < \infty \} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{e^z}{(z - i)^2}$$

este $z = i$ și din (1.3) rezultă că $\mathbf{Rez}_i f = e^i$.

c) Singurul punct singular izolat al funcției

$$f : D = \{ z \mid 0 < |z| < \infty \} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$$

este $z = 0$ și din (1.4) rezultă că $\mathbf{Rez}_0 f = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

1.5.24 MATHEMATICA: Series[f[z], {z, a, n}], Residue[f[z], {z, a}]

```
In[1]:=Series[1/(z^2(1-z)), {z, 0, 4}]    ↳ Out[1]=1/z^2+1/z+1+z+z^2+z^3+z^4+O[z]^5
In[2]:=Residue[1/(z^2(1-z)), {z, 0}]      ↳ Out[2]=1
In[3]:=Series[1/(z^2(1-z)), {z, 1, 2}]    ↳ Out[3]=-1/(z-1)+2-3(z-1)+4(z-1)^2+O[z]^3
In[4]:=Residue[1/(z^2(1-z)), {z, 1}]      ↳ Out[4]=-1
In[5]:=Series[Exp[z]/(z-I)^2, {z, I, 1}]  ↳ Out[5]=e^i/(z-i)^2+e^i/(z-i)+e^i/2+1/6 e^i(z-i)+O[z-i]^2
In[6]:=Residue[Exp[z]/(z-I)^2, {z, I}]    ↳ Out[6]=e^i.
```

1.5.25 Definiție. Fie D o mulțime deschisă și

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

o funcție olomorfă. Prin *zero multiplu de ordinul n* al lui f se înțelege un punct $z_0 \in D$ astfel încât

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \quad \text{și} \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Spunem despre un punct singular izolat z_0 al lui f că este *pol de ordinul n* dacă este zero multiplu de ordinul n pentru funcția $\frac{1}{f}$.

1.5.26 Teoremă. *Dacă punctul singular izolat z_0 al funcției olomorfe $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ este pol de ordinul n atunci există $r > 0$ astfel încât coroana circulară*

$$\{ z \mid 0 < |z - z_0| < r \}$$

este conținută în D și în această coroană f admite o dezvoltare Laurent de forma

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

1.5.27 a) Dacă z_0 este pol simplu atunci în jurul lui z_0 funcția f admite dezvoltarea

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Inmulțind cu $(z - z_0)$ obținem relația

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + a_2(z - z_0)^3 + \dots$$

care conduce la

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

b) Dacă z_0 este pol dublu atunci în jurul lui z_0 funcția f admite dezvoltarea

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Inmulțind cu $(z - z_0)^2$ și apoi derivând obținem relația

$$[(z - z_0)^2 f(z)]' = a_{-1} + 2a_0(z - z_0) + 3a_1(z - z_0)^2 + \dots$$

care conduce la

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^2 f(z)]'.$$

c) Dacă z_0 este pol triplu atunci în jurul lui z_0 funcția f admite dezvoltarea

$$f(z) = \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Inmulțind cu $(z - z_0)^3$ și apoi derivând de două ori obținem relația

$$[(z - z_0)^3 f(z)]'' = 2! a_{-1} + 6a_0(z - z_0) + 12a_1(z - z_0)^2 + \dots$$

care conduce la

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = a_{-1} = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^3 f(z)]''.$$

d) Dacă z_0 este pol de ordinul n atunci

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

1.5.28 Exemplu. Funcția

$$f : \mathbb{C} - \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

are două puncte singulare izolate $z = 0$ și $z = 1$. Punctul $z = 0$ este pol dublu și

$$\mathbf{Rez}_0 f = \lim_{z \rightarrow 0} [z^2 f(z)]' = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1-z} \right]' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(1-z)^2} = 1. \quad (1.5)$$

Punctul $z = 1$ este pol simplu și

$$\mathbf{Rez}_1 f = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-1}{z^2} = -1. \quad (1.6)$$

1.6 Calculul integralelor cu ajutorul reziduurilor**1.6.1** Dacă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} - \{z_0\}$$

este un drum închis care nu trece prin z_0 atunci

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \left(\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 \right) dz \\ = a_{-1} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i a_{-1} n(\gamma, z_0) \end{aligned} \quad (1.7)$$

oricare ar fi numerele $a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Punctul z_0 este punct singular izolat (pol de ordinul al doilea) pentru funcția $f : \mathbb{C} - \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2$$

și $\mathbf{Rez}_{z_0} f = a_{-1}$. Relația (1.7) se mai poate scrie

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i n(\gamma, z_0) \mathbf{Rez}_{z_0} f.$$

1.6.2 Teoremă (Teorema reziduurilor). Dacă $D \subseteq \mathbb{C}$ este o mulțime deschisă,

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcție olomorfă, S este mulțimea punctelor singulare izolate ale lui f și dacă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

este un drum omotop cu zero în $\tilde{D} = D \cup S$ atunci

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in S} n(\gamma, z) \mathbf{Rez}_z f.$$

O demonstrație poate fi găsită în [11].

1.6.3 Exercițiu. Să se calculeze

$$\int_{\gamma} \frac{4 dz}{(z^2 + 1)(z - 3)^2}$$

unde

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = 2e^{2\pi i t}.$$

Rezolvare. Considerăm $D = \mathbb{C} - \{3, i, -i\}$ și funcția olomorfă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{4}{(z^2 + 1)(z - 3)^2}.$$

Mulțimea punctelor singulare izolate ale lui f este $S = \{3, i, -i\}$ și drumul γ este omotop cu zero în $D \cup S = \mathbb{C}$. Conform teoremei reziduurilor avem

$$\int_{\gamma} \frac{4 dz}{(z^2 + 1)(z - 3)^2} = 2\pi i (n(\gamma, 3) \mathbf{Rez}_3 f + n(\gamma, i) \mathbf{Rez}_i f + n(\gamma, -i) \mathbf{Rez}_{-i} f).$$

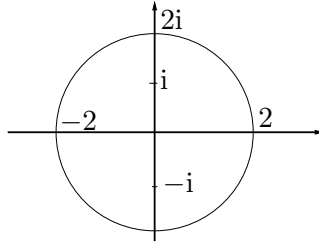


Figura 1.34: Drumul $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2e^{2\pi i t}$.

Deoarece drumul γ (Figura 1.34) se rotește de zero ori în jurul lui 3 și o singură dată în jurul lui i și $-i$ rezultă că

$$n(\gamma, 3) = 0, \quad n(\gamma, i) = n(\gamma, -i) = 1$$

și prin urmare

$$\int_{\gamma} \frac{4 dz}{(z^2 + 1)(z - 3)^2} = 2\pi i (\mathbf{Rez}_i f + \mathbf{Rez}_{-i} f).$$

Punctele singulare i și $-i$ fiind poli simpli avem

$$\mathbf{Rez}_i f = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{4}{(z - 3)^2(z + i)} = \frac{4}{2i(i - 3)^2} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

$$\mathbf{Rez}_{-i} f = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i)f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{4}{(z - 3)^2(z - i)} = \frac{4}{-2i(i + 3)^2} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

și

$$\int_{\gamma} \frac{4 dz}{(z^2 + 1)(z - 3)^2} = \frac{12}{25}\pi i.$$

1.6.4 MATHEMATICA: Residue[f[z], {z, a}]

$$\begin{aligned} \text{In}[1] := \text{Residue}[4/((z^2+1)(z-3)^2), \{z, I\}] &\mapsto \text{Out}[1] = \frac{3}{25} - \frac{4i}{25} \\ \text{In}[2] := \text{Residue}[4/((z^2+1)(z-3)^2), \{z, -I\}] &\mapsto \text{Out}[2] = \frac{3}{25} + \frac{4i}{25} \end{aligned}$$

1.6.5 Exercițiu. Să se calculeze

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^3} dz$$

unde

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = e^{-4\pi i t}.$$

Rezolvare. Considerăm funcția olomorfă

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{e^z}{z^3}$$

definită pe mulțimea deschisă $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. Punctul singular $z = 0$ este pol de ordinul al treilea. Pentru calculul reziduului lui f în 0 putem utiliza dezvoltarea Laurent în jurul lui 0

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{e^z}{z^3} &= \frac{1}{z^3} \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{1!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} z + \cdots \end{aligned}$$

sau relația

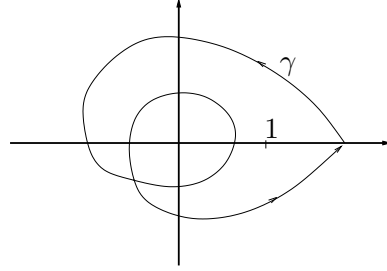
$$\mathbf{Rez}_0 f = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} (z^3 f(z))'' = \frac{1}{2}.$$

Observând că γ se rotește de două ori în jurul lui 0 în sens invers sau utilizând formula

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = -2$$

obținem

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^3} dz = 2\pi i n(\gamma, 0) \mathbf{Rez}_0 f = -2\pi i.$$

Figura 1.35: Drumul γ .

1.6.6 Exercițiu. Să se calculeze integrala

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2(1-z)} dz$$

unde γ este drumul din Figura 1.35 .

Rezolvare. Funcția olomorfa

$$f : \mathbb{C} - \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

are punctele singulare $z = 0$ și $z = 1$. Știm că $\mathbf{Rez}_0 f = 1$ (a se vedea relația (1.5)) și $\mathbf{Rez}_1 f = -1$ (a se vedea relația (1.6)). Deoarece drumul γ se rotește de două ori în jurul lui 0 și o dată în jurul lui 1, din teorema reziduurilor rezultă că

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2(1-z)} dz = 2\pi i (2 \mathbf{Rez}_0 f + \mathbf{Rez}_1 f) = 2\pi i.$$

1.6.7 Exercițiu. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos t} dt \quad \text{unde } a \in (1, \infty)$$

Rezolvare. Integrala reală cerută poate fi privită ca o integrală în planul complex și calculată folosind teorema reziduurilor. Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{it} \frac{2}{2a + e^{it} + e^{-it}}} (e^{it})' dt \\ &= -i \int_{\gamma} \frac{1}{z} \frac{2}{2a + z + \frac{1}{z}} dz = -i \int_{\gamma} \frac{2}{z^2 + 2az + 1} dz \end{aligned}$$

unde $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$. Funcția

$$f : \mathbb{C} - \{z_1, z_2\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{2}{z^2 + 2az + 1}$$

unde

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}, \quad z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$$

sunt rădăcinile polinomului $z^2 + 2az + 1$, are două puncte singulare izolate (poli simpli) z_1 și z_2 .

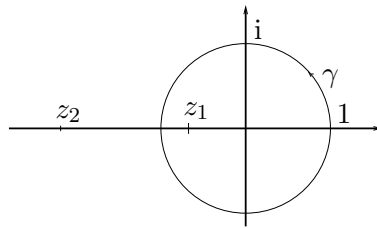


Figura 1.36: Drumul $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$.

Deoarece z_1, z_2 sunt numere reale, $-1 < z_1 < 0$ și $z_2 < -1$ rezultă că $n(\gamma, z_1) = 1$ și $n(\gamma, z_2) = 0$ (a se vedea Figura 1.36). Conform teoremei reziduurilor

$$\begin{aligned} I &= -i \int_{\gamma} \frac{2}{z^2 + 2az + 1} dz = 2\pi \mathbf{Rez}_{z_1} f = 2\pi \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) \\ &= 2\pi \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{2}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{4\pi}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

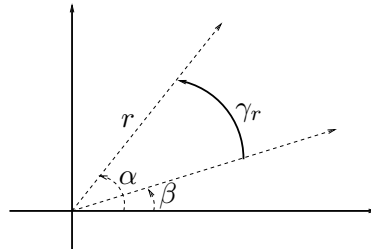


Figura 1.37: Drumurile γ_r .

1.6.8 Propoziție. Fie $\alpha < \beta$ și o funcție continuă

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}$$

definită pe un domeniu D ce conține imaginile drumurilor (Fig. 1.37)

$$\gamma_r : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_r(t) = re^{it}$$

oricare ar fi $r > 0$. Dacă

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$$

atunci

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0.$$

Demonstrație. Din relația $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ rezultă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $r_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$|z| > r_\varepsilon \quad \implies \quad |z f(z)| < \varepsilon.$$

În particular, pentru $r > r_\varepsilon$ avem

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| = \left| \int_\alpha^\beta f(re^{it}) r i e^{it} dt \right| \leq \int_\alpha^\beta |f(re^{it}) r i e^{it}| dt < \varepsilon \int_\alpha^\beta dt = (\beta - \alpha)\varepsilon.$$

1.6.9 Oricare ar fi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ au loc relațiile

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|,$$

$$|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_1|$$

care conduc la

$$-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

adică la

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

1.6.10 Exercițiu. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

Rezolvare. Integrala I este o integrală reală improprie. Intervalul de integrare este nemărginit dar funcția considerată este mărginită, numitorul neanulându-se pe axa reală. Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}}{\frac{1}{x^2}} = 1$$

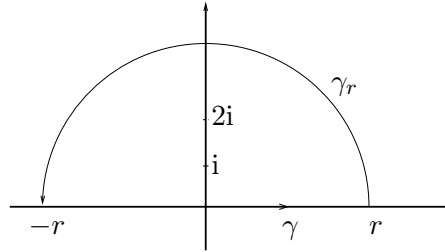
integralele

$$\int_1^\infty \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \quad \text{și} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

au aceeași natură. Știm însă că integrala improprie

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\lambda} dx$$

este convergentă pentru $\lambda > 1$. Rezultă astfel că integrala considerată

Figura 1.38: Drumurile γ_r .

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx + \int_1^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

este convergentă.

Pentru a calcula valoarea integralei vom considera funcția olomorfă

$$f : \mathbb{C} - \{-2i, -i, i, 2i\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

și drumul de integrare din Figura 1.38 compus din

$$\gamma_r : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_r(t) = r e^{it}$$

și

$$\gamma : [-r, r] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = t.$$

Conform teoremei reziduurilor, oricare ar fi $r > 2$ avem relația

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i (\mathbf{Rez}_i f + \mathbf{Rez}_{2i} f)$$

care conduce la

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = 2\pi i (\mathbf{Rez}_i f + \mathbf{Rez}_{2i} f). \quad (1.8)$$

Deoarece

$$|z f(z)| = \frac{|z^3|}{|z^2+1| \cdot |z^2+4|} = \frac{|z^3|}{|z^2 - (-1)| \cdot |z^2 - (-4)|} \leq \frac{|z|^3}{||z|^2 - 1| \cdot ||z|^2 - 4|}$$

avem

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$$

și în virtutea rezultatului prezentat la pag. 63-8

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0.$$

Din relația (1.8), ținând seama și de faptul că $f(-x) = f(x)$, rezultă

$$\int_0^\infty f(x)dx = \pi i (\mathbf{Rez}_i f + \mathbf{Rez}_{2i} f).$$

Dar

$$\mathbf{Rez}_i = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2}{(z + i)(z^2 + 4)} = \frac{i}{6}$$

$$\mathbf{Rez}_{2i} = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z + 2i)} = -\frac{i}{3}$$

și deci

$$\int_0^\infty f(x)dx = \pi i \left(\frac{i}{6} - \frac{i}{3} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

1.6.11 MATHEMATICA: `Residue[f[z], {z, a}], Integrate[f[x], {x, a, b}]`

`In[1]:=Residue[z^2/((z^2 + 1) (z^2 + 4)), {z, I}]` $\mapsto$ `Out[1]= $\frac{i}{6}$`
`In[2]:=Residue[z^2/((z^2 + 1) (z^2 + 4)), {z, I}]` $\mapsto$ `Out[2]= $-\frac{i}{3}$`
`In[3]:=Integrate[x^2/((x^2 + 1) (x^2 + 4)), {x, 0, Infinity}]` $\mapsto$ `Out[3]= $\frac{i}{6}$`

1.6.12 Exercițiu. Să se arate că

$$1 \geq \frac{\sin t}{t} \geq \frac{2}{\pi} \quad \text{oricare ar fi } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Rezolvare. Funcția

$$\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$$

este descrescătoare deoarece

$$\varphi'(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2} \leq 0.$$

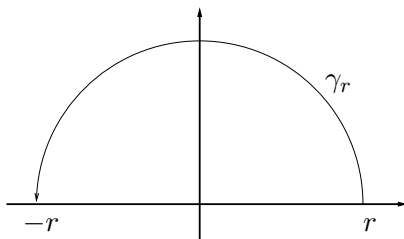


Figura 1.39: Drumurile γ_r .

1.6.13 Propoziție (Lema lui Jordan). *Dacă funcția continuă*

$$f : \{ z = x + yi \mid y \geq 0 \} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este astfel încât

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0 \quad (1.9)$$

și

$$\gamma_r : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_r(t) = r e^{it}$$

(a se vedea Figura 1.39) *atunci*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) e^{iz} dz = 0$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Din relația (1.9) rezultă că există $r_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$r > r_\varepsilon \quad \implies \quad |f(r e^{it})| < \frac{2\varepsilon}{\pi}$$

și

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_r} f(z) e^{iz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(r e^{it}) e^{ir(\cos t + i \sin t)} i r e^{it} dt \right| \\ &\leq \int_0^\pi |f(r e^{it})| e^{-r \sin t} r dt \leq \frac{2\varepsilon}{\pi} r \int_0^\pi e^{-r \sin t} dt \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{\pi} r \int_0^\pi e^{-r \frac{2}{\pi} t} dt = \frac{2\varepsilon}{\pi} r \frac{-\pi}{2r} e^{-r \frac{2}{\pi} t} \Big|_0^\pi = \varepsilon(1 - e^{-r}) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

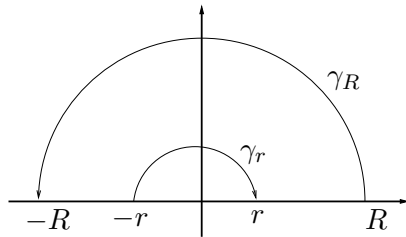


Figura 1.40: Drumul utilizat în cazul integralei Poisson.

1.6.14 Exercițiu (Integrala Poisson). Să se arate că

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (1.10)$$

Rezolvare. Fie $0 < r < R$ și drumurile (a se vedea Figura 1.40)

$$\gamma_R : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_R(t) = R e^{it}$$

$$\gamma_r : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_r(t) = r e^{i(\pi-t)}.$$

Din teorema reziduurilor (sau teorema Cauchy) rezultă relația

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx = 0$$

care se mai poate scrie

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 0$$

sau

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz + 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = 0$$

Utilizând relația

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz = -\pi i$$

și notând cu g o primitivă a funcției $f(z) = \frac{e^{iz}-1}{z}$ obținem

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz - \pi i + (g(r) - g(-r)) + 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = 0.$$

Deoarece conform lemei lui Jordan

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

pentru $R \rightarrow \infty$ și $r \rightarrow 0$ obținem relația

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \pi i.$$

1.6.15 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], {x, a, b}]`

`In[1]:=Integrate[Sin[x]/x, {x, 0, Infinity}]` $\mapsto$ `Out[1]=` $\frac{\pi}{2}$

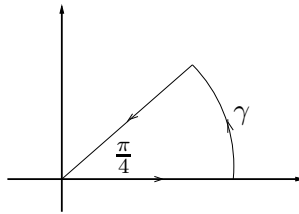


Figura 1.41: Drumul utilizat în cazul integralelor lui Fresnel.

1.6.16 Integralele lui Fresnel. Integrând funcția

$$f(z) = e^{iz^2}$$

de-a lungul drumului din Figura 1.41 se poate arăta [11] că

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

1.6.17 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], {x, a, b}]`

$$\text{In}[1] := \text{Integrate}[\text{Sin}[x^2], \{x, 0, \text{Infinity}\}] \mapsto \text{Out}[1] = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2}$$

$$\text{In}[2] := \text{Integrate}[\text{Cos}[x^2], \{x, 0, \text{Infinity}\}] \mapsto \text{Out}[2] = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2}$$

1.6.18 Definiție. Fie $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Funcția

$$\mathcal{F}[\varphi] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(x) dx$$

(în cazul în care există) se numește *transformata Fourier* a lui φ .

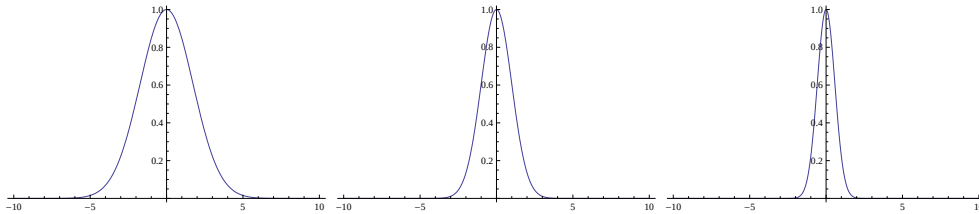


Figura 1.42: Funcțiile $e^{-\frac{3}{2}x^2}$, $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $e^{-\frac{1}{6}x^2}$.

1.6.19 Exercițiu. Să se arate că

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

oricare ar fi $a \in (0, \infty)$.

Rezolvare. Avem

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + i\xi x} dx = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x - i\frac{\xi}{2a})^2} dx.$$

Plecând de la integrala

$$\int_{-r}^r e^{-at^2} dt + \int_r^{r-i\frac{\xi}{2a}} e^{-az^2} dz - \int_{-r-i\frac{\xi}{2a}}^{r-i\frac{\xi}{2a}} e^{-az^2} dz + \int_{-r-i\frac{\xi}{2a}}^{-r} e^{-az^2} dz = 0$$

a funcției

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = e^{-az^2}$$

de-a lungul drumului dreptunghiular din Figura 1.43 arătăm că

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t-i\frac{\xi}{2a})^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Avem

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r e^{-at^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt.$$

Alegând pentru drumul liniar ce unește r cu $r - i\frac{\xi}{2a}$ parametrizarea

$$\gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = r - it\frac{\xi}{2a}$$

obținem relația

$$\int_r^{r-i\frac{\xi}{2a}} e^{-az^2} dz = \int_0^1 e^{-a(r-it\frac{\xi}{2a})^2} (-i)\frac{\xi}{2a} dt = -i\frac{\xi}{2a} e^{-ar^2} \int_0^1 e^{irt\xi + \frac{t^2\xi^2}{4a}} dt$$

din care rezultă

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_r^{r-i\frac{\xi}{2a}} e^{-az^2} dz = 0.$$

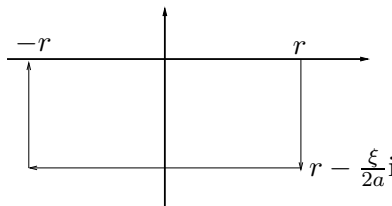


Figura 1.43: Drumul dreptunghiular utilizat.

Similar se arată că

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r-i\frac{\xi}{2a}}^{-r} e^{-az^2} dz = 0.$$

Alegând pentru drumul liniar ce unește $-r - i\frac{\xi}{2a}$ cu $r - i\frac{\xi}{2a}$ parametrizarea

$$\gamma_2 : [-r, r] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = t - i\frac{\xi}{2a}$$

obținem relația

$$\int_{-r-i\frac{\xi}{2a}}^{r-i\frac{\xi}{2a}} e^{-az^2} dz = \int_{-r}^r e^{-a(t-i\frac{\xi}{2a})^2} dt$$

din care rezultă

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r-i\frac{\xi}{2a}}^{r-i\frac{\xi}{2a}} e^{-az^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t-i\frac{\xi}{2a}\right)^2} dt.$$

1.6.20 MATHEMATICA: Definiția utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(t) dt$

In[1]:=FourierTransform[Exp[-t^2], t, x] $\mapsto$ Out[1]= $\frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{2}}$

Capitolul 2

Spații vectoriale finit-dimensionale

2.1 Spații vectoriale

2.1.1 Definiție. Fie $\mathbb{K}$ unul dintre corpurile $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Prin **spațiu vectorial** peste $\mathbb{K}$ se înțelege o mulțime V considerată împreună cu două operații

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V : (x, y) \mapsto x + y && \text{(adunarea)} \\ \cdot : \mathbb{K} \times V &\longrightarrow V : (\alpha, x) \mapsto \alpha x && \text{(înmulțirea cu scalari)} \end{aligned}$$

îndeplinind următoarele condiții:

1. $(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in V$
2. există un element $0 \in V$ astfel încât $0 + x = x + 0 = x, \quad \forall x \in V$
3. pentru fiecare $x \in V$ există $-x \in V$ astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = 0$
4. $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V$
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in V$
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in V$
7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in V$
8. $1x = x, \quad \forall x \in V.$

2.1.2 Elementele lui V se numesc *vectori* iar elementele lui $\mathbb{K}$ se numesc *scalari*. Un spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$ este numit *spațiu vectorial real* iar un spațiu vectorial peste $\mathbb{C}$ este numit *spațiu vectorial complex*. În loc de $x + (-y)$ scriem $x - y$.

2.1.3 Exercițiu Dacă V este spațiu vectorial atunci:

- a) $\alpha x = 0 \iff \alpha = 0 \text{ sau } x = 0$
- b) $\alpha(-x) = (-\alpha)x = -\alpha x$
- c) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$
- d) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$.

2.1.4 Definiție. Fie V un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$. Prin *subspațiu vectorial* al lui V se înțelege orice submulțime $W \subseteq V$ cu proprietatea

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in W \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \implies \alpha x + \beta y \in W.$$

2.1.5 Propoziție.

Dacă V este spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$ și $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o submulțime a lui V atunci

$$\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \}$$

este un subspațiu vectorial al lui V , numit subspațiul generat de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} & \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) + \mu(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n) \\ &= (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)v_1 + (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2)v_2 + \dots + (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)v_n. \end{aligned}$$

2.1.6 Definiție.

Spunem că $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este un *sistem de generatori* pentru V dacă

$$\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V.$$

2.1.7 Propoziție. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) Niciunul dintre vectorii $v_1, v_2, \dots, v_n$ nu se poate scrie ca o combinație liniară de ceilalți vectori
- b) relația $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ este posibilă numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, adică

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Demonstrație. a) $\implies$ b) Prin reducere la absurd, presupunând, de exemplu, ca relația $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ este posibilă și pentru $\alpha_n \neq 0$ se obține

$$v_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n}v_2 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}v_{n-1}.$$

b) $\implies$ a) Dacă, de exemplu, am avea $v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_{n-1} v_{n-1}$ atunci

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_{n-1} v_{n-1} - v_n = 0$$

adică relația $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ ar fi posibilă și în alte cazuri decât $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

2.1.8 Definiție.

Spunem că $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este un *sistem de vectori liniar independenți* dacă

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

2.1.9 Definiție. Prin *bază* a unui spațiu vectorial se înțelege un sistem de generatori format din vectori liniar independenți.

2.1.10 Pentru a arăta că $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este bază lui V avem de arătat că:

- a) $V = \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- b) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$

2.1.11 Propoziție. Dacă $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este bază lui V atunci orice vector $x \in V$ se poate scrie în mod unic sub forma

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

(numerele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ se numesc *coordonatele* lui x în raport cu baza $\mathfrak{B}$).

Demonstrație. $\mathfrak{B}$ fiind sistem de generatori rezultă că există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ în $\mathbb{K}$ astfel încât $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$. Relația

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$$

echivalentă cu

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$$

conduce la $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0$, adică $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$.

2.1.12 Se poate arăta că (a se vedea [4]) :

- Dacă $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ este sistem de vectori liniar independenți și $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este sistem de generatori atunci $k \leq n$.
- Din orice sistem de generatori se poate extrage o bază.
- Orice sistem liniar independent se poate completa până la o bază.
- Dacă un spațiu vectorial admite un sistem de generatori (finit), atunci oricare două baze au același număr de vectori.

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}.$$

se numește *matricea de trecere* de la baza $\mathfrak{B}$ la baza $\mathfrak{B}'$.

2.1.18 Folosind convenția de sumare, relațiile (2.1) se scriu comprimat

$$v'_i = \alpha_i^j v_j.$$

2.1.19 Propoziție. *Matricea S este inversabilă și inversa ei*

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \cdots & \beta_n^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \cdots & \beta_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \cdots & \beta_n^n \end{pmatrix}$$

este matricea de trecere de la $\mathfrak{B}'$ la $\mathfrak{B}$.

Demonstrație. Fie $v_j = \beta_j^k v'_k$. Din relațiile

$$v_j = \beta_j^k v'_k = \beta_j^k \alpha_k^i v_i, \quad v'_i = \alpha_i^j v_j = \alpha_i^j \beta_j^k v'_k$$

rezultă ținând seama de unicitatea reprezentării unui vector în raport cu o bază că

$$\beta_j^k \alpha_k^i = \delta_j^i, \quad \alpha_i^j \beta_j^k = \delta_i^k. \quad \blacksquare \quad (2.2)$$

2.1.20 Teoremă. *Cu notațiile de mai sus*

$$\left. \begin{array}{l} v'_i = \alpha_i^j v_j \\ x = x^j v_j = x'^i v'_i \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} x^j = \alpha_i^j x'^i \\ x'^i = \beta_j^i x^j \end{array} \right.$$

Demonstrație. Din relația

$$x^j v_j = x'^i v'_i = x'^i \alpha_i^j v_j$$

rezultă

$$x^j = \alpha_i^j x'^i$$

și ținând seama de (2.2)

$$\beta_j^k x^j = \beta_j^k \alpha_i^j x'^i = \delta_i^k x'^i = x'^k$$

adică

$$x'^k = \beta_j^k x^j.$$

2.1.21 Propoziție. *Pe orice spațiu vectorial complex V se obține o structură naturală de spațiu vectorial real prin restricția scalarilor și*

$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \dim_{\mathbb{C}} V.$$

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază a spațiului vectorial complex V . Oricare ar fi $x \in V$ există numerele complexe $\alpha_1 + \beta_1 i, \alpha_2 + \beta_2 i, \dots, \alpha_n + \beta_n i$ astfel încât

$$x = (\alpha_1 + \beta_1 i)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2 i)v_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n i)v_n.$$

Scriind această relație sub forma

$$x = \alpha_1 v_1 + \beta_1 i v_1 + \alpha_2 v_2 + \beta_2 i v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_n i v_n$$

deducem că $\mathfrak{B} = \{v_1, i v_1, v_2, i v_2, \dots, v_n, i v_n\}$ este sistem de generatori pentru spațiul vectorial real V . Relația

$$\alpha_1 v_1 + \beta_1 i v_1 + \alpha_2 v_2 + \beta_2 i v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_n i v_n = 0$$

se poate scrie

$$(\alpha_1 + \beta_1 i)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2 i)v_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n i)v_n = 0$$

și conduce la $\alpha_1 + \beta_1 i = \alpha_2 + \beta_2 i = \dots = \alpha_n + \beta_n i = 0$, adică la

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \dots = \alpha_n = \beta_n = 0.$$

2.1.22 Propoziție. *Dacă V este un spațiu vectorial real atunci spațiul*

$$V \times V = \{ (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in V \}$$

considerat împreună cu adunarea pe componente

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

și înmulțirea cu numere complexe

$$(\alpha + \beta i)(x_1, x_2) = (\alpha x_1 - \beta x_2, \alpha x_2 + \beta x_1)$$

este un spațiu vectorial complex notat cu ${}^{\mathbb{C}}V$ (complexificatul lui V) și

$$\dim_{\mathbb{C}} {}^{\mathbb{C}}V = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază a spațiului vectorial real V . Arătăm că

$$\mathfrak{B} = \{(v_1, 0), (v_2, 0), \dots, (v_n, 0)\}$$

este bază a spațiului vectorial complex ${}^{\mathbb{C}}V$. Oricare ar fi $x_1, x_2 \in V$ există numerele reale $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ și $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ astfel încât

$$x_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, \quad x_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n.$$

Deoarece $i(v_j, 0) = (0, v_j)$ avem

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &= (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, 0) + (0, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1 i)(v_1, 0) + (\alpha_2 + \beta_2 i)(v_2, 0) + \cdots + (\alpha_n + \beta_n i)(v_n, 0). \end{aligned}$$

Dacă

$$(\alpha_1 + \beta_1 i)(v_1, 0) + (\alpha_2 + \beta_2 i)(v_2, 0) + \cdots + (\alpha_n + \beta_n i)(v_n, 0) = (0, 0)$$

atunci

$$(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n) = (0, 0)$$

ceea ce conduce la $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ și $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$.

2.1.23 Scriind $x_1 + x_2 i$ în loc de (x_1, x_2) obținem

$${}^{\mathbb{C}}V = \{ x_1 + x_2 i \mid x_1, x_2 \in V \}$$

și înmulțirea cu scalari

$$(\alpha + \beta i)(x_1 + x_2 i) = (\alpha x_1 - \beta x_2) + (\alpha x_2 + \beta x_1)i$$

coincide formal cu înmulțirea uzuală a numerelor complexe.

2.1.24 Definiție. Prin *relație de echivalență* pe o mulțime M se înțelege o submulțime

$\mathcal{R} \subseteq M \times M$ cu proprietățile:

- 1) $(x, x) \in \mathcal{R}, \quad \forall x \in M$ (reflexivitate)
- 2) $(x, y) \in \mathcal{R} \implies (y, x) \in \mathcal{R}$ (simetrie)
- 3) $\left. \begin{array}{l} (x, y) \in \mathcal{R} \\ (y, z) \in \mathcal{R} \end{array} \right\} \implies (x, z) \in \mathcal{R}$ (tranzitivitate)

În loc de $(x, y) \in \mathcal{R}$ se preferă să se scrie $x \mathcal{R} y$ sau $x \sim y$.

2.1.25 Definiție. Prin *partiție* a unei mulțimi M se înțelege o familie $\{M_i\}_{i \in I}$ de submulțimi ale lui M cu proprietățile:

- 1) $M_i \neq \emptyset, \quad \forall i \in I$
- 2) $M_i \cap M_j = \emptyset, \quad \forall i, j \in I \text{ cu } i \neq j$
- 3) $\bigcup_{i \in I} M_i = M.$

2.1.26 Propoziție.

a) Dacă $\sim$ este relație de echivalență pe M atunci mulțimile distincte de forma

$$\hat{x} = \{ y \mid y \sim x \} \quad (\text{clasa de echivalență a lui } x)$$

formează o partiție a lui M , notată cu $M/\sim$ și este numită mulțimea factor corespunzătoare relației $\sim$.

b) Invers, dacă $\{M_i\}_{i \in I}$ este o partiție a lui M atunci relația $\sim$ definită prin

$$x \sim y \quad \text{dacă există } i \in I \text{ astfel încât } x, y \in M_i$$

este o relație de echivalență pe M .

Demonstrație. a) Reunind toate clasele de echivalență obținem mulțimea M și $\hat{x} \neq \emptyset$ deoarece $x \in \hat{x}$. În plus,

$$x \in \hat{y} \cap \hat{z} \implies \begin{cases} x \sim y \\ x \sim z \end{cases} \implies y \sim z \implies \hat{y} = \hat{z}.$$

b) Evident, relația $\sim$ este reflexivă și simetrică. Dacă $x \sim y$ și $y \sim z$ atunci există $i, j \in I$ astfel încât $x, y \in M_i$ și $y, z \in M_j$. Mulțimile partiției fiind disjuncte rezultă că $M_i = M_j$ și prin urmare $x \sim z$.

2.1.27 Propoziție. Dacă V este un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$ și $W \subseteq V$ este un subspațiu vectorial atunci relația

$$x \sim y \quad \text{dacă } x - y \in W$$

este o relație de echivalență pe V . Pe mulțimea factor $V/\sim$ notată cu V/W și formată din toate clasele de echivalență

$$\hat{x} = x + W = \{ x + y \mid y \in W \}$$

relațiile

$$\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x + y}, \quad \alpha \hat{x} = \widehat{\alpha x}$$

definesc o structură de spațiu vectorial (numit spațiu factor).

Demonstrație. Avem

$$x - x = 0 \in W \implies x \sim x$$

$$x \sim y \implies x - y \in W \implies y - x \in W \implies y \sim x$$

$$\left. \begin{matrix} x \sim y \\ y \sim z \end{matrix} \right\} \implies \left. \begin{matrix} x - y \in W \\ y - z \in W \end{matrix} \right\} \implies x - z = (x - y) + (y - z) \in W \implies x \sim z.$$

Deoarece $W + W = \{ x + y \mid x, y \in W \} = W$ și $\alpha W = \{ \alpha x \mid x \in W \} = W$ avem

$$(x + W) + (y + W) = x + y + W, \quad \alpha(x + W) = \alpha x + W$$

ceea ce arata că operațiile cu clase de echivalență sunt bine definite (nu depind de reprezentantul ales). Elementul neutru este $\hat{0} = 0 + W = W$ iar opusul lui $\hat{x}$ este $-\hat{x} = \widehat{-x} = -x + W$.

2.1.28 Exercițiu. Descrieți spațiul vectorial factor $\mathbb{R}^2/W$ în cazul

$$W = \{ (0, y) \mid y \in \mathbb{R} \}.$$

Rezolvare. În acest caz

$$(x, y) \sim (x', y') \iff (x, y) - (x', y') \in W \iff x = x'.$$

Rezultă că

$$\widehat{(x, y)} = (x, y) + W = \{ (x, y') \mid y' \in \mathbb{R} \}$$

și prin urmare,

$$\mathbb{R}^2/W = \{ \widehat{(x, 0)} \mid x \in \mathbb{R} \}.$$

2.1.29 Trecerea de la $\mathbb{R}^2$ la $\mathbb{R}^2/W$ se realizează “ignorând” coordonata y , adică identificând vectorii (x, y) din $\mathbb{R}^2$ cu același x .

2.1.30 Teoremă. Dacă W este subspațiu vectorial al lui V atunci

$$\dim V/W = \dim V - \dim W.$$

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ o bază a lui W pe care o completăm până la o bază $\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ a lui V . Arătăm că $\{\hat{v}_{k+1}, \hat{v}_{k+2}, \dots, \hat{v}_n\}$ este bază a lui V/W . Dacă

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n \in V$$

atunci

$$\hat{x} = \alpha_1 \hat{v}_1 + \dots + \alpha_k \hat{v}_k + \alpha_{k+1} \hat{v}_{k+1} + \dots + \alpha_n \hat{v}_n = \alpha_{k+1} \hat{v}_{k+1} + \dots + \alpha_n \hat{v}_n.$$

Pe de altă parte dacă

$$\alpha_{k+1} \hat{v}_{k+1} + \alpha_{k+2} \hat{v}_{k+2} + \dots + \alpha_n \hat{v}_n = 0$$

atunci

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + \dots + \alpha_n v_n \in W$$

și deci există $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$\alpha_{k+1}v_{k+1} + \alpha_{k+2}v_{k+2} + \dots + \alpha_nv_n = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \dots + \alpha_kv_k$$

relație care conduce la $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = \alpha_n = 0$.

2.2 Transformări liniare

2.2.1 Definiție. Fie V și W spații vectoriale peste același corp $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

O aplicație

$$A : V \longrightarrow W : x \mapsto Ax$$

este numită *transformare liniară* (sau *aplicație liniară*) dacă

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \quad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Transformările liniare $A : V \rightarrow V$ mai sunt numite *operatori liniari*.

2.2.2 Vom utiliza notațiile

$$\mathcal{L}(V, W) = \{ A : V \longrightarrow W \mid A \text{ este transformare liniară} \}$$

$$\mathcal{L}(V) = \{ A : V \longrightarrow V \mid A \text{ este operator liniar} \}.$$

2.2.3 Propoziție. Dacă $A : V \longrightarrow W$ este o aplicație liniară atunci

$$\text{Ker } A \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \in V \mid Ax = 0 \}$$

este subspațiu vectorial al lui V , numit nucleul lui A , iar

$$\text{Im } A \stackrel{\text{def}}{=} \{ Ax \mid x \in V \}$$

este subspațiu vectorial al lui W , numit imaginea lui A .

Demonstrație. Avem

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in \text{Ker } A \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \implies A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0 \implies \alpha x + \beta y \in \text{Ker } A.$$

Dacă $v, w \in \text{Im } A$ atunci există $x, y \in V$ astfel încât $v = Ax$ și $w = Ay$. Oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ avem

$$\alpha v + \beta w = \alpha Ax + \beta Ay = A(\alpha x + \beta y)$$

ceea ce arată că $\alpha v + \beta w \in \text{Im } A$.

2.2.4 MATHEMATICA: Bază în $\text{Ker } A$

$$\begin{aligned} \text{In}[1] := \text{MatrixForm}[\{\{1, 2, 3\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 6, 9\}\}] &\mapsto \text{Out}[1] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \\ \text{In}[2] := \text{NullSpace}[\{\{1, 2, 3\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 6, 9\}\}] &\mapsto \text{Out}[2] = \{\{-3, 0, 1\}, \{-2, 1, 0\}\} \end{aligned}$$

2.2.5 Teoremă (a rangului). *Dacă $A : V \longrightarrow W$ este transformare liniară atunci*

$$\dim V = \dim \text{Ker } A + \dim \text{Im } A.$$

Demonstrație. Fie $\mathfrak{B}_0 = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ o bază a subspațiului $\text{Ker } A$, unde $k = \dim \text{Ker } A$. Acest sistem de vectori liniar independenți îl completăm până la o bază $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$ a lui V , unde $n = \dim V$. Vom arăta că

$$\mathfrak{B}' = \{Av_{k+1}, Av_{k+2}, \dots, Av_n\}$$

este o bază a subspațiului $\text{Im } A$.

$\mathfrak{B}'$ este sistem de vectori liniar independenți: Din

$$\alpha_{k+1} Av_{k+1} + \alpha_{k+2} Av_{k+2} + \dots + \alpha_n Av_n = 0$$

rezultă

$$A(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + \dots + \alpha_n v_n) = 0$$

ceea ce arată că $\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + \dots + \alpha_n v_n \in \text{Ker } A$. Sistemul de vectori $\mathfrak{B}_0$ fiind o bază în $\text{Ker } A$, rezultă că există $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + \dots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$$

adică

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k - \alpha_{k+1} v_{k+1} - \alpha_{k+2} v_{k+2} - \dots - \alpha_n v_n = 0.$$

Deoarece $\mathfrak{B}$ este bază în V , această relație este posibilă doar în cazul

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = \alpha_n = 0$$

ceea ce arată că $\mathfrak{B}'$ este sistem de vectori liniar independenți.

$\mathfrak{B}'$ este sistem de generatori: Oricare ar fi $y \in \text{Im } A$ există $x \in V$ astfel încât $y = Ax$.

Plecând de la reprezentarea $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ a lui x în baza $\mathfrak{B}$ se obține

$$\begin{aligned} y = Ax &= \lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2 + \dots + \lambda_k Av_k + \lambda_{k+1} Av_{k+1} + \dots + \lambda_n Av_n \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 + \lambda_{k+1} Av_{k+1} + \dots + \lambda_n Av_n \end{aligned}$$

ceea ce arată că $\mathfrak{B}'$ este sistem de generatori pentru $\text{Im } A$.

2.2.6 Propoziție.

O transformare liniară $A : V \longrightarrow W$ este injectivă dacă și numai dacă $\text{Ker } A = \{0\}$.

Demonstrație. Dacă A este injectivă atunci $Ax=0$ implică $x=0$ și deci $\text{Ker } A = \{0\}$.
Invers, dacă $\text{Ker } A = \{0\}$ atunci

$$Ax=Ay \implies Ax-Ay=0 \implies A(x-y)=0 \implies x-y=0 \implies x=y.$$

2.2.7 Propoziție.

Inversa unei transformări liniare bijective este o transformare liniară.

Demonstrație. Fie $A : V \longrightarrow W$ o aplicație liniară bijectivă. Oricare ar fi $x, y \in W$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ are loc relația

$$\alpha x + \beta y = \alpha A(A^{-1}x) + \beta A(A^{-1}y) = A(\alpha A^{-1}x + \beta A^{-1}y)$$

și prin urmare $A^{-1}(\alpha x + \beta y) = \alpha A^{-1}x + \beta A^{-1}y$.

2.2.8 Definiție. Prin *izomorfism liniar* se înțelege o transformare liniară bijectivă.

2.2.9 Definiție. Spunem că spațiile vectoriale V și W sunt *izomorfe* dacă există un izomorfism liniar $A : V \longrightarrow W$.

2.2.10 Teoremă. Două spații vectoriale peste același corp $\mathbb{K}$ sunt izomorfe dacă și numai dacă au aceeași dimensiune.

Demonstrație. Fie V și W spații vectoriale peste $\mathbb{K}$ izomorfe și fie $A : V \longrightarrow W$ un izomorfism liniar. Din relațiile

$$\text{Ker } A = \{0\}, \quad \text{Im } A = W, \quad \dim V = \dim \text{Ker } A + \dim \text{Im } A$$

rezultă că $\dim V = \dim W$. Invers, dacă $\dim V = \dim W = n$, alegând o bază $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ în V și o bază $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ în W putem defini izomorfismul liniar

$$A : V \longrightarrow W, \quad A(x^j v_j) = x^j w_j.$$

2.2.11 Notăția $\mathbb{K}^n$ se utilizează pentru spațiul vectorial

$$\mathbb{K}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K} \}$$

identificat cu spațiul vectorial al matricelor linie

$$\mathbb{K}^n = \{ (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K} \}$$

dar și pentru spațiul vectorial al matricelor coloană

$$\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mid x^1, x^2, \dots, x^n \in \mathbb{K} \right\}.$$

2.2.12 Teoremă. *Dacă V este un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$ atunci orice bază $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a lui V (cu ordinea vectorilor fixată) definește izomorfismul*

$$A : V \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad A(x^j v_j) = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

care permite identificarea lui V cu $\mathbb{K}^n$.

Demonstrație. Aplicația A este liniară, $\text{Ker } A = \{0\}$ și $\text{Im } A = \mathbb{K}^n$.

2.2.13 Definiție. Fie V și W spații vectoriale peste același corp $\mathbb{K}$,

$\mathfrak{B}_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bază în V

$\mathfrak{B}_W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ bază în W

$A : V \longrightarrow W$ transformare liniară și fie

$$Av_i = a_i^j w_j$$

adică

$$Av_1 = a_1^1 w_1 + a_1^2 w_2 + \dots + a_1^m w_m$$

$$Av_2 = a_2^1 w_1 + a_2^2 w_2 + \dots + a_2^m w_m$$

.....

$$Av_n = a_n^1 w_1 + a_n^2 w_2 + \dots + a_n^m w_m.$$

Matricea

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^m \end{pmatrix}$$

se numește *matricea lui A în raport cu bazele $\mathfrak{B}_V$ și $\mathfrak{B}_W$.*

2.2.14 Deoarece orice vector se poate reprezenta în mod unic sub forma

$$x = x^i v_i \quad \text{adică} \quad x = \sum_{i=1}^n x^i v_i$$

rezultă că

$$Ax = A \left(\sum_{i=1}^n x^i v_i \right) = \sum_{i=1}^n x^i A v_i = \sum_{i=1}^n x^i \left(\sum_{j=1}^m a_i^j w_j \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_i^j x^i \right) w_j$$

ceea ce arată că transformarea liniară A este complet determinată de matricea ei în raport cu bazele alese.

2.2.15 Punând

$$x = x^i v_i = x^1 v_1 + x^2 v_2 + \cdots + x^n v_n, \quad y = y^j w_j = y^1 w_1 + y^2 w_2 + \cdots + y^m w_m$$

relația $y = Ax$ se poate scrie sub forma

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

2.2.16 Teoremă. La o schimbare de bază matricea unui operator liniar

$A : V \longrightarrow V$ se schimbă după formula

$$A' = S^{-1} A S$$

unde S este matricea de trecere de la baza veche la baza nouă.

Demonstrație. Fie $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\mathfrak{B}' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ baze în V ,

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \quad \text{unde} \quad v'_i = \alpha_i^j v_j$$

matricea de trecere de la $\mathfrak{B}$ la $\mathfrak{B}'$ și fie

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \quad \text{unde} \quad A v_i = a_i^k v_k$$

și

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{unde} \quad Av'_i = a'^k_i v'_k$$

matricele lui A în raport cu $\mathfrak{B}$ și respectiv $\mathfrak{B}'$. Din relațiile

$$\begin{aligned} Av'_i &= A(\alpha^j_i v_j) = \alpha^j_i Av_j = \alpha^j_i a^k_j v_k \\ Av'_i &= a'^j_i v'_j = a'^j_i \alpha^k_j v_k \end{aligned}$$

rezultă

$$\alpha^k_j a'^j_i = a^k_j \alpha^j_i$$

adică relația $S\mathcal{A}' = \mathcal{A}S$ care implică $\mathcal{A}' = S^{-1}\mathcal{A}S$.

2.2.17 Definiție. Fie V un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$ și $A: V \rightarrow V$ un operator liniar. Spunem că numărul $\lambda \in \mathbb{K}$ este *valoare proprie* a lui A dacă există un vector $v \neq 0$, numit *vector propriu* corespunzător valorii λ , astfel încât

$$Av = \lambda v.$$

2.2.18 Propoziție. Dacă λ este valoare proprie a operatorului $A: V \rightarrow V$ atunci

$$V_\lambda = \{x \in V \mid Ax = \lambda x\}$$

este subspațiu vectorial al lui V (numit subspațiul propriu corespunzător lui λ).

Demonstrație. Avem

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in V_\lambda \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \implies A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha \lambda x + \beta \lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y).$$

2.2.19 Propoziție. Polinomul (numit polinomul caracteristic)

$$P(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 - \lambda & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix}$$

2.2.23 În cazul în care V este spațiu vectorial real, numai rădăcinile reale ale polinomului caracteristic sunt valori proprii ale lui A .

2.2.24 Definiție. Fie $A : V \longrightarrow V$ un operator liniar și $W \subseteq V$ subspațiu vectorial. Spunem că W este *subspațiu invariant* dacă

$$A(W) \subseteq W.$$

2.2.25 Subspațiile proprii ale unui operator liniar sunt subspații invariante

$$w \in V_\lambda \quad \implies \quad Aw = \lambda w \in V_\lambda.$$

2.2.26 Propoziție. Matricea unui operator liniar $A : V \longrightarrow V$ în raport cu o bază $\mathfrak{B}$ este o matrice diagonală dacă și numai dacă $\mathfrak{B}$ este formată doar din vectori proprii ai lui A .

Demonstrație. Dacă $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază a lui V formată din vectori proprii ai lui A

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

(unele dintre numerele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ putând fi egale) atunci matricea lui A în această bază este

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Invers, dacă matricea lui A în raport cu o bază $\mathfrak{B} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ are forma diagonală

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

atunci

$$Aw_i = \alpha_i w_i$$

oricare ar fi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Deoarece o bază nu poate conține vectorul nul rezultă că $w_1, w_2, \dots, w_n$ sunt vectori proprii ai lui A și $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ valorile proprii corespunzătoare.

2.2.27 Definiție. Fie $A: V \rightarrow V$ un operator liniar și λ o valoare proprie.

Spunem că λ are *multiplicitatea algebrică* k dacă este rădăcină de ordinul k a polinomului caracteristic.

Prin *multiplicitate geometrică* a lui λ se înțelege dimensiunea subspațiului propriu V_λ corespunzător lui λ .

2.2.28 Propoziție. Dacă $v_1, v_2, \dots, v_k$ sunt vectori proprii ai operatorului

$$A: V \rightarrow V$$

corespunzători la valori proprii distincte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

atunci $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ este sistem de vectori liniar independenți.

Demonstrație (cazul $k = 3$). Din

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \tag{2.3}$$

rezultă

$$A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) = 0$$

adică relația

$$\alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2 + \alpha_3 Av_3 = 0$$

care se mai scrie

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \alpha_3 \lambda_3 v_3 = 0. \tag{2.4}$$

Adunând relația (2.4) cu relația (2.3) înmulțită cu $(-\lambda_3)$ se obține

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_3)v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_3)v_2 = 0. \tag{2.5}$$

Aplicând operatorul A relației (2.5) obținem

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_3)\lambda_1 v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_3)\lambda_2 v_2 = 0. \tag{2.6}$$

Adunând relația (2.6) cu relația (2.5) înmulțită cu $(-\lambda_2)$ rezultă

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 = 0.$$

Deoarece $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sunt distincte și $v_1 \neq 0$ rezultă $\alpha_1 = 0$ și apoi din (2.5) obținem $\alpha_2 = 0$. Înlocuind în (2.3) pe α_1 și α_2 cu 0 deducem că $\alpha_3 = 0$.

2.2.29 Din propoziția anterioară rezultă existența formei diagonale în cazul în care rădăcinile polinomului caracteristic aparțin toate corpului $\mathbb{K}$ peste care este considerat V și sunt toate distincte.

2.2.30 Teoremă. *Fie V un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$ și fie $A : V \rightarrow V$ un operator liniar. Există o bază a lui V în raport cu care matricea lui A este diagonală dacă și numai dacă toate rădăcinile polinomului caracteristic aparțin lui $\mathbb{K}$ și pentru fiecare dintre ele multiplicitatea algebrică este egală cu cea geometrică.*

Demonstrație. (în cazul a două rădăcini $\lambda_1 \neq \lambda_2$ cu multiplicitățile 2 și respectiv 3). În cazul considerat $\dim V = 2 + 3 = 5$, $\dim V_{\lambda_1} = 2$ și $\dim V_{\lambda_2} = 3$. Fie $\{v_1, v_2\}$ bază în

$$V_{\lambda_1} = \{ x \in V \mid Ax = \lambda_1 x \}$$

și $\{w_1, w_2, w_3\}$ bază în

$$V_{\lambda_2} = \{ x \in V \mid Ax = \lambda_2 x \}.$$

Este suficient să arătăm că $\{v_1, v_2, w_1, w_2, w_3\}$ este bază în V . Fie

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 w_1 + \alpha_4 w_2 + \alpha_5 w_3 = 0. \quad (2.7)$$

Aplicând A obținem

$$\lambda_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + \lambda_2(\alpha_3 w_1 + \alpha_4 w_2 + \alpha_5 w_3) = 0.$$

Adunând această relație cu relația (2.7) înmulțită cu $(-\lambda_2)$ obținem

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = 0$$

de unde $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Înlocuind în (2.7) rezultă $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$.

2.2.31 Orice matrice

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

este matricea în raport cu baza canonică

$$\mathfrak{B} = \{e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)\}$$

a operatorului liniar

$$A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

2.2.32 Definiție. Prin *valoare proprie a unei matrice* (respectiv *vector propriu al unei matrice*) $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ se înțelege o valoare proprie (respectiv vector propriu) a operatorului liniar asociat $A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$.

2.2.33 MATHEMATICA: `Eigenvalues[A]`, `Eigenvectors[A]`

In[1]:=MatrixForm[{{0,1,1}, {1,0,1}, {1,1,0}}] $\mapsto$ Out[1]= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
 In[2]:=Eigenvalues[{{0,1,1}, {1,0,1}, {1,1,0}}] $\mapsto$ Out[2]={2,-1,-1}
 In[3]:=Eigenvectors[{{0,1,1}, {1,0,1}, {1,1,0}}] $\mapsto$ Out[3]={{1,1,1},{-1,0,1},{-1,1,0}}

2.2.34 Definiție. Spunem că matricea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ este *diagonalizabilă* dacă operatorului liniar asociat $A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ este diagonalizabil.

2.3 Dualul unui spațiu vectorial

2.3.1 Definiție. Fie V un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$. O funcție

$$\varphi : V \longrightarrow \mathbb{K}$$

este numită *formă liniară* dacă

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y), \quad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

2.3.2 Dacă $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este bază în V și $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{K}$ este formă liniară atunci există numerele $\varphi_i = \varphi(v_i)$ unic determinate astfel încât

$$\varphi(x) = \varphi_i x^i \quad \text{adică} \quad \varphi(x^i v_i) = \varphi_i x^i.$$

2.3.3 Dacă V este un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$ atunci

$$V^* = \{ \varphi : V \longrightarrow \mathbb{K} \mid \varphi \text{ este formă liniară} \}$$

înzestrat cu operațiile de adunare

$$V^* \times V^* \longrightarrow V^* : (\varphi, \psi) \mapsto \varphi + \psi \quad \text{unde} \quad \begin{array}{l} \varphi + \psi : V \longrightarrow \mathbb{K} \\ (\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) \end{array}$$

și înmulțire cu scalari

$$\mathbb{K} \times V^* \longrightarrow V^* : (\lambda, \varphi) \mapsto \lambda\varphi \quad \text{unde} \quad \begin{array}{l} \lambda\varphi : V \longrightarrow \mathbb{K} \\ (\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x) \end{array}$$

este spațiu vectorial (numit *dualul* lui V).

2.3.4 Teoremă *Oricare ar fi spațiul vectorial V avem*

$$\dim V^* = \dim V.$$

Demonstrație. Fie $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază. Arătăm că $\mathfrak{B}^* = \{v^1, v^2, \dots, v^n\}$, unde

$$v^i : V \longrightarrow \mathbb{K}, \quad v^i(v_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

adică

$$v^i : V \longrightarrow \mathbb{K}, \quad v^i(x^1 v_1 + x^2 v_2 + \dots + x^n v_n) = x^i$$

este o bază a lui V^* , numită *duala* bazei $\mathfrak{B}$. Fie

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \dots + \alpha_n v^n = 0$$

adică

$$(\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \dots + \alpha_n v^n)(x) = 0, \quad \forall x \in V$$

ceea ce se mai scrie

$$\alpha_1 v^1(x) + \alpha_2 v^2(x) + \dots + \alpha_n v^n(x) = 0, \quad \forall x \in V.$$

Alegând $x = v_1$ obținem $\alpha_1 = 0$, alegând $x = v_2$ obținem $\alpha_2 = 0$, etc.

Dacă $\varphi \in V^*$ atunci notând $\varphi_i = \varphi(v_i)$ obținem

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x^1 v_1 + x^2 v_2 + \dots + x^n v_n) = x^1 \varphi(v_1) + x^2 \varphi(v_2) + \dots + x^n \varphi(v_n) \\ &= v^1(x) \varphi_1 + v^2(x) \varphi_2 + \dots + v^n(x) \varphi_n = (\varphi_1 v^1 + \varphi_2 v^2 + \dots + \varphi_n v^n)(x) \end{aligned}$$

oricare ar fi $x \in V$, adică

$$\varphi = \varphi_1 v^1 + \varphi_2 v^2 + \dots + \varphi_n v^n = \varphi_i v^i.$$

2.3.5 Definiție. Fie $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază în V . Baza lui V^*

$$\mathfrak{B}^* = \{v^1, v^2, \dots, v^n\}$$

formată din formele liniare $v^i : V \rightarrow \mathbb{K}$, definite prin

$$v^i(v_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

adică din funcțiile

$$v^i : V \rightarrow \mathbb{K}, \quad v^i(x^1 v_1 + x^2 v_2 + \dots + x^n v_n) = x^i$$

se numește *duala* bazei $\mathfrak{B}$.

2.3.6 Dacă $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este bază în V și $\mathfrak{B}^* = \{v^1, v^2, \dots, v^n\}$ duala ei atunci

$$\begin{aligned} x \in V &\implies x = x^i v_i = \sum_{i=1}^n v^i(x) v_i & \text{adică } x^i &= v^i(x) \\ \varphi \in V^* &\implies \varphi = \varphi_i v^i = \sum_{i=1}^n \varphi(v_i) v^i & \text{adică } \varphi_i &= \varphi(v_i). \end{aligned}$$

2.3.7 Dacă $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este bază în V și $\mathfrak{B}^* = \{v^1, v^2, \dots, v^n\}$ duala ei atunci

$$V \rightarrow \mathbb{K}^n : x \mapsto \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad V^* \rightarrow \mathbb{K}^n : \varphi \mapsto (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_n)$$

sunt izomorfisme liniare care permit identificarea spațiilor V și V^* cu $\mathbb{K}^n$. Avem

$$\varphi(x) = \varphi_i x^i = (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

2.3.8 Teoremă Fie V un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$,

$\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\mathfrak{B}' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ două baze în V ,

$\mathfrak{B}^* = \{v^1, v^2, \dots, v^n\}$, $\mathfrak{B}'^* = \{v'^1, v'^2, \dots, v'^n\}$ dualele lor și

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \dots & \beta_n^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \dots & \beta_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \dots & \beta_n^n \end{pmatrix}$$

matricele de trecere între $\mathfrak{B}$ și $\mathfrak{B}'$. Oricare ar fi

$$\begin{aligned}
x &= x^j v_j = x'^i v'_i \in V & \text{și} & & \varphi &= \varphi_j v^j = \varphi'_i v'^i \in V^* \\
\text{au loc relațiile} & & & & & \\
v'_i &= \alpha_i^j v_j & v'^i &= \beta_j^i v^j & & \\
\varphi'_i &= \alpha_i^j \varphi_j & x'^i &= \beta_j^i x^j. & & (2.8)
\end{aligned}$$

Demonstrație. Avem

$$x^j v_j = x'^i v'_i = x'^i \alpha_i^j v_j \implies x^j = \alpha_i^j x'^i \implies \beta_j^k x^j = \beta_j^k \alpha_i^j x'^i = \delta_i^k x'^i = x'^k.$$

Deoarece $x'^k = v'^k(x)$ și $x^j = v^j(x)$ relația anterioară se poate scrie sub forma

$$v'^k(x) = \beta_j^k v^j(x) \quad \text{sau} \quad v'^k(x) = (\beta_j^k v^j)(x).$$

Relația având loc pentru oricare $x \in V$ rezultă

$$v'^k = \beta_j^k v^j.$$

Folosind liniaritatea lui φ obținem

$$\varphi'_i = \varphi(v'_i) = \varphi(\alpha_i^j v_j) = \alpha_i^j \varphi(v_j) = \alpha_i^j \varphi_j.$$

2.3.9 Dualul $V^{**} = (V^*)^*$ al dualului V^* este numit *bidualul* lui V . Avem

$$V^{**} = \{ f : V^* \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ este forma liniară} \} \quad \text{și} \quad \dim V^{**} = \dim V^* = \dim V.$$

Știm că două spații vectoriale de aceeași dimensiune pot fi identificate alegând câte o bază în fiecare dintre ele. Evident, identificarea depinzând de bazele alese, se poate face într-o infinitate de feluri. Arătăm că orice spațiu vectorial V se poate identifica cu bidualul V^{**} într-un mod natural care să nu mai depindă de alegerea unor baze. Relațiile (2.8) arată existența unei ciclicități în cazul repetării trecerii la dual.

2.3.10 Teoremă Aplicația

$$\Psi : V \longrightarrow V^{**} : x \mapsto \Psi[x]$$

prin care vectorului $x \in V$ i se asociază forma liniară

$$\Psi[x] : V^* \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \Psi[x](f) = f(x)$$

este un izomorfism liniar care permite identificarea lui V cu V^{**} .

Demonstrație. Funcția $\Psi[x]$ aparține lui V^{**} deoarece este liniară

$$\Psi[x](\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \Psi[x](f) + \beta \Psi[x](g).$$

Aplicația $\Psi : V \longrightarrow V^{**}$ este transformare liniară deoarece

$$\Psi[\alpha x + \beta y](f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = (\alpha \Psi[x] + \beta \Psi[y])(f)$$

oricare ar fi $f \in V^*$. Transformarea Ψ este injectivă deoarece din

$$\Psi[x] = 0 \iff \Psi[x](f) = 0, \forall f \in V^* \iff f(x) = 0, \forall f \in V^*$$

rezultă $\text{Ker } \Psi = \{0\}$. Conform teoremei rangului are loc relația

$$\dim \text{Ker } \Psi + \dim \text{Im } \Psi = \dim V$$

din care rezultă $\text{Im } \Psi = V^{**}$, adică surjectivitatea lui Ψ .

2.4 Sume de spații vectoriale

2.4.1 Propoziție. *Dacă $W_1 \subseteq V$ și $W_2 \subseteq V$ sunt subspații vectoriale atunci*

$$W = W_1 \cap W_2$$

este subspațiu vectorial al lui V .

Demonstrație. Avem

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in W \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x, y \in W_1 \\ x, y \in W_2 \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \alpha x + \beta y \in W_1 \\ \alpha x + \beta y \in W_2 \end{array} \right\} \implies \alpha x + \beta y \in W.$$

2.4.2 In general, reuniunea a două subspații vectoriale ale unui spațiu vectorial V nu este un subspațiu vectorial. De exemplu,

$$W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{și} \quad W_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

sunt subspații vectoriale ale lui $\mathbb{R}^2$, dar $W = W_1 \cup W_2$ nu este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$. Intr-adevăr, $(1, 0) \in W$ și $(0, 1) \in W$ dar $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin W$.

2.4.3 Propoziție. *Dacă $W_1 \subseteq V$ și $W_2 \subseteq V$ sunt subspații vectoriale atunci*

$$W_1 + W_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

este subspațiu vectorial al lui V .

Demonstrație. Avem

$$\left. \begin{array}{l} w_1 + w_2 \in W_1 + W_2 \\ w'_1 + w'_2 \in W_1 + W_2 \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha(w_1 + w_2) + \beta(w'_1 + w'_2) \\ = (\alpha w_1 + \beta w'_1) + (\alpha w_2 + \beta w'_2) \in W_1 + W_2. \end{array} \right.$$

2.4.4 Definiție. Fie $W_1, W_2 \subseteq V$ două subspații vectoriale. Subspațiul vectorial

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

se numește *suma subspațiilor* W_1 și W_2 .

2.4.5 Teoremă (a dimensiunii). *Dacă W_1 și W_2 sunt subspații ale lui V atunci*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Demonstrație. Fie $\mathfrak{B}_0 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ o bază a spațiului vectorial $W_1 \cap W_2$ pe care o completăm până la o bază

$$\mathfrak{B}_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

a spațiului vectorial W_1 și până la o bază

$$\mathfrak{B}_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n, w_1, w_2, \dots, w_m\}$$

a spațiului vectorial W_2 , unde $n = \dim(W_1 \cap W_2)$, $n + k = \dim W_1$, $n + m = \dim W_2$. Este suficient să arătăm că

$$\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_m\}$$

este o bază a lui $W_1 + W_2$. Orice vector de forma $x_1 + x_2$ cu $x_1 \in W_1$ și $x_2 \in W_2$ este o combinație liniară de vectorii lui $\mathfrak{B}$. Relația

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m = 0 \quad (2.9)$$

se poate scrie sub forma

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k = -\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_m w_m.$$

Egalitatea dintre vectorul $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k$ aparținând lui W_1 și vectorul $-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_m w_m$ aparținând lui W_2 este posibilă numai dacă $-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_m w_m \in W_1 \cap W_2$, adică dacă există $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \in \mathbb{K}$ încât

$$-\gamma_1 w_1 - \gamma_2 w_2 - \dots - \gamma_m w_m = \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \dots + \delta_n u_n.$$

Scriind ultima relație sub forma

$$\delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \dots + \delta_n u_n + \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \dots + \gamma_m w_m = 0$$

și ținând seama de faptul că $\mathfrak{B}_2$ este bază în W_2 rezultă

$$\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_m = 0.$$

Relația (2.9) devine

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k = 0.$$

Tinând seama de faptul că $\mathfrak{B}_1$ este bază în W_1 obținem

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0.$$

Prin urmare $\mathfrak{B}$ este bază a lui $W_1 + W_2$ și

$$\dim(W_1 + W_2) = n + k + m = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

2.4.6 Definiție. Fie W_1, W_2 două subspații vectoriale ale unui spațiu vectorial V .

Spunem că suma $W_1 + W_2$ este *sumă directă* și utilizăm notația

$$W_1 \oplus W_2$$

dacă scrierea oricărui vector $w \in W_1 + W_2$ ca suma $w = w_1 + w_2$ dintre un vector $w_1 \in W_1$ și un vector $w_2 \in W_2$ este unică.

2.4.7 Propoziție. Fie $W_1, W_2 \subseteq V$ două subspații vectoriale.

Suma $W_1 + W_2$ este sumă directă dacă și numai dacă

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}.$$

Demonstrație. “ $\implies$ ” Dacă $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$ atunci există $x \in W_1 \cap W_2$ nenul care admite reprezentările $x = x + 0$ și $x = 0 + x$, ceea ce arată că suma nu este directă.

“ $\impliedby$ ” Fie subspațiile W_1 și W_2 cu $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Dacă $v \in W_1 + W_2$ admite reprezentările

$$\begin{aligned} v &= w_1 + w_2 & \text{cu } w_1 \in W_1 \text{ și } w_2 \in W_2 \\ v &= w'_1 + w'_2 & \text{cu } w'_1 \in W_1 \text{ și } w'_2 \in W_2 \end{aligned}$$

atunci

$$w_1 + w_2 = w'_1 + w'_2.$$

Scriind această relație sub forma

$$w_1 - w'_1 = w_2 - w'_2$$

din $w_1 - w'_1 \in W_1$, $w_2 - w'_2 \in W_2$ și $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ deducem că $w_1 - w'_1 = 0$, $w_2 - w'_2 = 0$, adică $w_1 = w'_1$ și $w_2 = w'_2$, ceea ce arată că suma este directă.

2.4.8 In cazul sumei directe avem $\dim W_1 \oplus W_2 = \dim W_1 + \dim W_2$.

2.4.9 Am definit suma a două spații vectoriale în cazul particular în care există un spațiu vectorial în care ambele sunt subspații vectoriale. Ea reprezintă o sumă *internă*. Arătăm ca suma a două spații vectoriale se poate defini pentru orice spații vectoriale peste același corp și poate fi privită ca o *sumă directă externă*.

2.4.10 Propoziție. Dacă V și W sunt spații vectoriale peste același corp $\mathbb{K}$ atunci

$$V \times W = \{ (x, y) \mid x \in V, y \in W \}$$

considerat împreună cu adunarea

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

și înmulțirea cu scalari

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

este spațiu vectorial, notat cu $V \oplus W$ și

$$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W.$$

Demonstrație. Dacă $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ și $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ sunt baze în V și W atunci

$$\{(v_1, 0), (v_2, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), (0, w_2), \dots, (0, w_k)\}$$

este bază în $V \times W$.

2.4.11 Definiție. Fie V și W două spații vectoriale peste același corp $\mathbb{K}$. Spațiul

$$V \oplus W \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, y) \mid x \in V, y \in W \}$$

se numește *suma directă* a spațiilor V și W .

2.4.12 Spațiile V și W pot fi identificate cu subspațiile

$$\{(x, 0) \mid x \in V\}, \quad \{(0, y) \mid y \in W\}$$

ale lui $V \oplus W$ și avem

$$\{(x, 0) \mid x \in V\} \cap \{(0, y) \mid y \in W\} = \{(0, 0)\}$$

$$\{(x, 0) \mid x \in V\} + \{(0, y) \mid y \in W\} = V \oplus W$$

ceea ce justifică notația $V \oplus W$.

2.4.13 Exemplu. Avem $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, ...

2.5 Produs tensorial de spații vectoriale

2.5.1 Pe parcursul acestei secțiuni vom continua să utilizăm convenția de sumare scriind, de exemplu,

$$\begin{array}{lll} F^{ij} v_i \otimes w_j & \text{în loc de} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F^{ij} v_i \otimes w_j \\ v^i (T v_k) v^k & \text{în loc de} & \sum_{k=1}^n v^i (T v_k) v^k, \text{ etc.} \end{array}$$

2.5.2 Dacă V este un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$ și $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază cu duala $\{v^1, v^2, \dots, v^n\}$ atunci

$$\begin{array}{lll} x \in V & \implies & x = x^i v_i \quad \text{cu} \quad x^i = v^i(x) \\ \varphi \in V^* & \implies & \varphi = \varphi_i v^i \quad \text{cu} \quad \varphi_i = \varphi(v_i) \\ A \in \mathcal{L}(V) & \implies & A v_i = a_i^j v_j \quad \text{cu} \quad a_i^j = v^j(A v_i). \end{array}$$

Aplicațiile

$$V \longrightarrow \mathbb{K}^n : x \mapsto \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1(x) \\ v^2(x) \\ \vdots \\ v^n(x) \end{pmatrix}$$

$$V^* \longrightarrow \mathbb{K}^n : \varphi \mapsto (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = (\varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_n))$$

sunt izomorfisme liniare care permit identificarea spațiilor V și V^* cu $\mathbb{K}^n$.

2.5.3 Dacă V este un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$, asociind fiecărui $x \in V$ forma liniară (a se vedea pag. 95-10)

$$x : V^* \longrightarrow \mathbb{K}, \quad x(\varphi) = \varphi(x)$$

obținem un izomorfism $V \longrightarrow V^{**}$ care permite identificarea lui V cu bidualul

$$V^{**} = \{ f : V^* \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ este formă liniară} \}.$$

2.5.4 Definiție. Fie V, W două spații vectoriale peste același corp $\mathbb{K}$. O aplicație

$$F : V^* \times W^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

este numită *formă biliniară* dacă

$$\begin{aligned} F(\alpha\varphi + \beta\psi, \eta) &= \alpha F(\varphi, \eta) + \beta F(\psi, \eta), \quad \forall \varphi, \psi \in V^*, \quad \forall \eta \in W^*, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \\ F(\varphi, \alpha\eta + \beta\mu) &= \alpha F(\varphi, \eta) + \beta F(\varphi, \mu), \quad \forall \varphi \in V^*, \quad \forall \eta, \mu \in W^*, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

2.5.5 Exempletu. Oricare ar fi $x \in V$ și $y \in W$, aplicația

$$x \otimes y : V^* \times W^* \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (x \otimes y)(f, g) = f(x)g(y)$$

este formă biliniară.

2.5.6 Definiție. Fie V, W două spații vectoriale peste același corp $\mathbb{K}$. Spațiul

$$V \otimes W \stackrel{\text{def}}{=} \{ F : V^* \times W^* \longrightarrow \mathbb{K} \mid F \text{ este formă biliniară} \}$$

considerat împreună cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire cu scalari este un spațiu vectorial, numit produsul tensorial al spațiilor V și W .

2.5.7 Teoremă Fie V, W două spații vectoriale peste același corp $\mathbb{K}$. Dacă

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ este bază în } V \text{ și}$$

$$\{w_1, w_2, \dots, w_m\} \text{ este bază în } W$$

atunci

$$\{v_i \otimes w_j \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}\}$$

este bază în $V \otimes W$ și prin urmare $\dim V \otimes W = nm$, adică

$$\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W.$$

Demonstrație. Oricare ar fi forma biliniară $F : V^* \times W^* \rightarrow \mathbb{K}$ avem

$$F(\varphi, \psi) = F(\varphi(v_i)v^i, \psi(w_j)w^j) = F(v^i, w^j) \varphi(v_i) \psi(w_j) = F(v^i, w^j) v_i \otimes w_j (\varphi, \psi)$$

oricare ar fi $\varphi \in V^*$ și $\psi \in W^*$ adică

$$F = F^{ij} v_i \otimes w_j \quad \text{unde} \quad F^{ij} = F(v^i, w^j)$$

Dacă numerele $\alpha^{ij} \in \mathbb{K}$ sunt astfel încât

$$\alpha^{ij} v_i \otimes w_j = 0, \quad \text{adică} \quad \alpha^{ij} v_i \otimes w_j (\varphi, \psi) = 0$$

oricare ar fi $\varphi \in V^*$ și $\psi \in W^*$, atunci alegând $\varphi = v^k$ și $\psi = w^\ell$ deducem că

$$\alpha^{ij} v_i \otimes w_j (v^k, w^\ell) = 0, \quad \text{adică} \quad \alpha^{ij} v^k(v_i) w^\ell(w_j) = 0$$

ceea ce conduce la $\alpha^{k\ell} = 0$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ și $\ell \in \{1, 2, \dots, m\}$.

2.5.8 Alegând o bază $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ în V și o bază $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ în W , produsul tensorial $V \otimes W$ se poate descrie ca fiind format din toate combinațiile liniare

$$F = F^{ij} v_i \otimes w_j \quad \text{cu} \quad F^{ij} \in \mathbb{K}.$$

2.5.9 Definiție. Fie $\mathbb{K}$ unul dintre corpurile $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ și fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}).$$

Prin *minor* de ordin k al lui A se înțelege un determinant de forma

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

unde

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \quad \text{și} \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq m.$$

2.5.10 Definiție. Spunem că matricea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ are *rangul* r și scriem

$$\text{rang } A = r$$

dacă A are un minor de ordinul r nenul și toți minorii de ordin mai mare sunt nuli.

2.5.11 Teoremă (Kronecker). *Dacă*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$$

și

$$A_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{im}) \in \mathcal{M}_{1 \times m}(\mathbb{K}), \quad A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$$

atunci

$$\text{rang } A = \dim \text{span}\{A_1, A_2, \dots, A_n\} = \dim \text{span}\{A^1, A^2, \dots, A^m\}.$$

Demonstrație. A se vedea [4], pag 38.

2.5.12 Propoziție (Reprezentarea matricială a lui $V \otimes W$).

Fie V , W două spații vectoriale peste același corp $\mathbb{K}$. Dacă $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este bază în V și $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ este bază în W atunci aplicația

$$V \otimes W \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}) : F = F^{ij} v_i \otimes w_j \mapsto \mathcal{F} = \begin{pmatrix} F^{11} & F^{12} & \dots & F^{1m} \\ F^{21} & F^{22} & \dots & F^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F^{n1} & F^{n2} & \dots & F^{nm} \end{pmatrix}$$

este un izomorfism liniar care permite identificarea spațiilor $V \otimes W$ și $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$.

Demonstrație. Avem $\dim V \otimes W = nm = \dim \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ și $\mathcal{F} = 0$ implică $F = 0$.

2.5.13 Propoziție. Dacă $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este bază în V și $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ în W

$$\left. \begin{array}{l} x = x^i v_i \\ y = y^j w_j \end{array} \right\} \implies x \otimes y = x^i y^j v_i \otimes w_j$$

adică

$$(x \otimes y)^{ij} = x^i y^j.$$

Demonstrație. Oricare ar fi $\varphi \in V^*$ și $\psi \in W^*$ avem

$$x \otimes y (\varphi, \psi) = \varphi(x) \psi(y) = \varphi(x^i v_i) \psi(y^j w_j) = x^i y^j \varphi(v_i) \psi(w_j) = x^i y^j (v_i \otimes w_j)(\varphi, \psi).$$

2.5.14 Matricea asociată vectorului $x \otimes y$ este matricea de rang 1

$$\begin{pmatrix} x^1 y^1 & x^1 y^2 & \dots & x^1 y^m \\ x^2 y^1 & x^2 y^2 & \dots & x^2 y^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n y^1 & x^n y^2 & \dots & x^n y^m \end{pmatrix}$$

Pe de altă parte, orice matrice de rang 1 este de această formă (vezi pag. 102-11).

Un vector $F \in V \otimes W$ se poate scrie sub forma $x \otimes y$ dacă și numai dacă rangul matricei asociate este 1.

2.5.15* Definiție. Spunem despre un vector $F \in V \otimes W$ că este *separabil* (*unentangled*, în engleză) dacă se poate scrie sub forma $x \otimes y$. În caz contrar spunem că F este *inseparabil* (*entangled*, în engleză).

2.5.16 Izomorfismul $V \otimes W \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}) : F \mapsto \mathcal{F}$ definit mai sus depinde de alegerea bazelor utilizate, dar se poate arăta că pentru orice $F \in V \otimes W$ numărul rang $\mathcal{F}$ este independent de bazele alese. În cazul în care este mai mare decât 1, numărul întreg

$$\text{rang} \begin{pmatrix} F^{11} & F^{12} & \dots & F^{1m} \\ F^{21} & F^{22} & \dots & F^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F^{n1} & F^{n2} & \dots & F^{nm} \end{pmatrix}$$

este o măsură a inseparabilității vectorului $F^{ij} v_i \otimes w_j$.

2.5.17 În mecanica cuantică, produsul tensorial de spații vectoriale este utilizat pentru a descrie sisteme cuantice compuse din subsisteme.

2.5.18 Definiție. Fie $S:V \longrightarrow V$ și $T:W \longrightarrow W$ operatori liniari. Operatorul liniar

$$T \otimes S : V \otimes W \longrightarrow V \otimes W, \quad ((T \otimes S)F)(\varphi, \psi) = F(\varphi \circ T, \psi \circ S)$$

se numește *produsul tensorial* al operatorilor T și S .

2.5.19 În cazul particular $F = x \otimes y$ obținem

$$((T \otimes S)(x \otimes y))(\varphi, \psi) = (x \otimes y)(\varphi \circ T, \psi \circ S) = \varphi(Tx) \psi(Sy) = ((Tx) \otimes (Sy))(\varphi, \psi)$$

oricare ar fi $\varphi \in V^*$ și $\psi \in W^*$, adică

$$(T \otimes S)(x \otimes y) = (Tx) \otimes (Sy)$$

Deoarece $T \otimes S$ este operator liniar și spațiul $V \otimes W$ este format din combinații liniare de elemente de forma $x \otimes y$, se poate utiliza relația precedentă ca o definiție alternativă pentru produsul tensorial al operatorilor T și S .

Capitolul 3

Tensori pe spații vectoriale finit-dimensionale

3.1 Tensori

3.1.1 Fie V un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$ și fie două baze ale lui V

$$\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \quad (\text{baza } \textit{veche})$$

$$\mathfrak{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\} \quad (\text{baza } \textit{nouă})$$

și

$$\mathfrak{B}^* = \{e^1, e^2, \dots, e^n\}, \quad \mathfrak{B}'^* = \{e'^1, e'^2, \dots, e'^n\}$$

dualele lor. Fiecare vector $x \in V$ se poate dezvolta în raport cu cele două baze

și am arătat că

$$x = x^i e_i = x'^j e'_j$$

$$x^i = e^i(x), \quad x'^j = e'^j(x).$$

Similar, fiecare element $\varphi \in V^*$ admite dezvoltările

$$\varphi = \varphi_i e^i = \varphi'_j e'^j$$

și

$$\varphi_i = \varphi(e_i), \quad \varphi'_j = \varphi(e'_j).$$

Plecând de la dezvoltările vectorilor bazei noi în raport cu vectorii bazei vechi

$$e'_i = \alpha_i^j e_j$$

definim matricele de trecere între bazele $\mathfrak{B}$ și $\mathfrak{B}'$

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \cdots & \beta_n^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \cdots & \beta_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \cdots & \beta_n^n \end{pmatrix}.$$

Oricare ar fi

$$x = x^j v_j = x'^i v'_i \in V \quad \text{și} \quad \varphi = \varphi_j v^j = \varphi'_i v'^i \in V^*$$

au loc relațiile (a se vedea pag. 77-20)

$$\begin{aligned} v'_i &= \alpha_i^j v_j & v'^i &= \beta_j^i v^j \\ \varphi'_i &= \alpha_i^j \varphi_j & x'^i &= \beta_j^i x^j. \end{aligned}$$

3.1.2 Coordonatele *noi* x'^i ale unui vector $x \in V$ se exprimă cu ajutorul coordonatelor vechi x^j prin formula $x'^i = \beta_j^i x^j$ similară cu formula $e'^i = \beta_j^i e^j$ de schimbare a bazei duale. Formula $\varphi'_i = \alpha_i^j \varphi_j$ este similară cu $e'_i = \alpha_i^j e_j$.

3.1.3 Vectorii $x \in V$ sunt obiecte matematice care în raport cu fiecare bază $\mathfrak{B}$ a lui V sunt descrise prin coordonatele $x^1, x^2, \dots, x^n$ și care la o schimbare de bază $e'_i = \alpha_i^j e_j$ se schimbă după formula

$$x'^i = \beta_j^i x^j.$$

Similar, elementele $\varphi \in V^*$ (numite *forme liniare* sau *1-forme*) sunt obiecte matematice care în raport cu fiecare bază $\mathfrak{B}^*$ sunt descrise prin coordonatele $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ și care la o schimbare de bază $e'_i = \alpha_i^j e_j$ se schimbă după formula

$$\varphi'_i = \alpha_i^j \varphi_j.$$

3.1.4 Definiție. Prin *tensor de tip* (p, q) (adică, tensor de p ori contravariant și de q ori covariant) se înțelege un obiect matematic T descris în raport cu fiecare bază $\mathfrak{B}$ a lui V prin coordonatele $T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ și care la o schimbare de bază $e'_i = \alpha_i^j e_j$ se schimbă după formula

$$T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = \beta_{k_1}^{i_1} \beta_{k_2}^{i_2} \cdots \beta_{k_p}^{i_p} \alpha_{j_1}^{m_1} \alpha_{j_2}^{m_2} \cdots \alpha_{j_q}^{m_q} T_{m_1 m_2 \dots m_q}^{k_1 k_2 \dots k_p}.$$

3.1.5 Elementele spațiului vectorial V sunt tensori de tip $(1, 0)$, iar elementele lui V^* sunt tensori de tip $(0, 1)$.

3.1.6 Un tensor de tip $(1, 1)$ este descris prin coordonatele T_j^i care la schimbarea bazei se schimbă după formula

$$T'^i_j = \beta_k^i \alpha_j^m T_m^k.$$

În cazul unui tensor de două ori contravariant formula devine

$$T'^{ij} = \beta_k^i \beta_m^j T^{km}$$

iar în cazul unui tensor de două ori covariant

$$T'_{ij} = \alpha_i^k \alpha_j^m T_{km}.$$

3.1.7 Un tensor este complet determinat dacă i se cunosc coordonatele într-o bază.

3.2 Operații cu tensori

3.2.1 Propoziție (Suma a doi tensori). *Dacă $A_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ și $B_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ sunt coordonatele a doi tensori A și B de tip (p, q) atunci*

$$T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = A_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} + B_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$$

sunt coordonatele unui tensor de tip (p, q) notat cu $A + B$, adică

$$(A + B)_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = A_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} + B_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Demonstrație (cazul $p = q = 1$). Avem

$$T_j^i = A_j^i + B_j^i = \beta_k^i \alpha_j^m A_m^k + \beta_k^i \alpha_j^m B_m^k = \beta_k^i \alpha_j^m (A_m^k + B_m^k) = \beta_k^i \alpha_j^m T_m^k.$$

3.2.2 Propoziție (Înmulțirea unui tensor cu un scalar).

Dacă $\lambda \in \mathbb{K}$ și $A_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ sunt coordonatele unui tensor A de tip (p, q) atunci

$$T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = \lambda A_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$$

sunt coordonatele unui tensor de tip (p, q) notat cu λA , adică

$$(\lambda A)_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = \lambda A_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Demonstrație (cazul $p = q = 1$). Avem

$$T_j^{ri} = \lambda A_j^{ri} = \lambda \beta_k^i \alpha_j^m A_m^k = \beta_k^i \alpha_j^m T_m^k.$$

3.2.3 Propoziție (Produsul tensorial a doi tensori, într-un caz particular).

Dacă A_{jk}^i sunt coordonatele unui tensor A de tip $(1, 2)$ și B_m^l sunt coordonatele unui tensor B de tip $(1, 1)$ atunci

$$T_{jkm}^{il} = A_{jk}^i \cdot B_m^l$$

sunt coordonatele unui tensor de tip $(2, 3)$ notat cu $A \otimes B$, adică

$$(A \otimes B)_{jkm}^{il} = A_{jk}^i \cdot B_m^l.$$

Demonstrație. Avem

$$T_{jkm}^{il} = A_{jk}^i \cdot B_m^l = \beta_a^i \alpha_j^b \alpha_k^c A_{bc}^a \beta_r^l \alpha_m^s B_s^r = \beta_a^i \beta_r^l \alpha_j^b \alpha_k^c \alpha_m^s T_{bcs}^{ar}.$$

3.2.4 Generalizarea definiției produsului tensorial este imediată. Produsul tensorial

$x \otimes \varphi$ dintre un vector $x \in V$ și o 1-formă $\varphi \in V^*$ are coordonatele

$$(x \otimes \varphi)_j^i = x^i \varphi_j$$

iar produsul tensorial $x \otimes y$ a doi vectori coordonatele

$$(x \otimes y)^{ij} = x^i y^j.$$

3.2.5 Propoziție (Contractia unui tensor, într-un caz particular).

Fie A_{klm}^{ij} coordonatele unui tensor A de tip $(2, 3)$. Numerele

$$T_{km}^j = \sum_{i=1}^n A_{kim}^{ij}$$

sunt coordonatele unui tensor de tip $(1, 2)$ obținut prin contractia lui A în raport cu primul indice de contravarianță și al doilea indice de covarianță.

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} T_{km}^j &= \sum_{i=1}^n A_{kim}^{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_a^i \beta_b^j \alpha_k^c \alpha_m^d \alpha_r^e A_{cdr}^{ab} = \left(\sum_{i=1}^n \beta_a^i \alpha_i^d \right) \beta_b^j \alpha_k^c \alpha_m^r A_{cdr}^{ab} = \delta_a^d \beta_b^j \alpha_k^c \alpha_m^r A_{cdr}^{ab} \\ &= \beta_b^j \alpha_k^c \alpha_m^r \left(\delta_a^d A_{cdr}^{ab} \right) = \beta_b^j \alpha_k^c \alpha_m^r \left(\sum_{a=1}^n A_{car}^{ab} \right) = \beta_b^j \alpha_k^c \alpha_m^r T_{cr}^b. \end{aligned}$$

3.2.6 Operația de contracție se poate face în raport cu orice pereche de indici formată dintr-un indice de contravarianță (superior) și un indice de covarianță (inferior).

3.2.7 Exercițiu. Să se arate că dacă $x \in V$ și $\varphi \in V^*$ atunci numărul

$$\gamma = x^i \varphi_i$$

este un tensor de tip $(0,0)$, numit *scalar*.

Rezolvare. Numărul γ se obține prin contracție din $x \otimes \varphi$ și nu depinde de baza aleasă

$$\gamma' = \sum_{i=1}^n x'^i \varphi'_i = \sum_{i=1}^n \beta_j^i \alpha_i^k x^j \varphi_k = \delta_j^k x^j \varphi_k = x^j \varphi_j = \gamma.$$

3.3 Exemple de tensori

3.3.1 Exercițiu. Să se arate că obiectul matematic care are coordonatele

$$T_j^i = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

indiferent de baza utilizată, este un tensor de tip $(1,1)$.

Rezolvare. Avem

$$T'^i_j = \delta_j^i = \beta_k^i \alpha_j^k = \beta_k^i \alpha_j^m \delta_m^k = \beta_k^i \alpha_j^m T_m^k.$$

3.3.2 Propoziție Orice operator liniar $A : V \rightarrow V$ este un tensor de tip $(1,1)$ ale cărui coordonate într-o bază $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ sunt coeficienții A_i^j din dezvoltarea

$$Ae_i = A_i^j e_j.$$

Demonstrație. Din relația $Ae'_i = A'^j_i e'_j$ rezultă

$$A(\alpha_i^k e_k) = A'^j_i \alpha_j^m e_m$$

relație care scrisă sub forma

$$\alpha_i^k Ae_k = \alpha_j^m A'^j_i e_m$$

conduce la

$$\alpha_i^k A^m_k e_m = \alpha_j^m A'^j_i e_m$$

adică

$$\alpha_i^k A_k^m = \alpha_j^m A_i^j.$$

Din această relație obținem

$$\beta_m^s \alpha_i^k A_k^m = \beta_m^s \alpha_j^m A_i^j$$

relație echivalentă cu

$$A_i'^s = \beta_m^s \alpha_i^k A_k^m$$

deoarece $\beta_m^s \alpha_j^m A_i^j = \delta_j^s A_i^j = A_i'^s$.

3.3.3 Definiție. Spunem că aplicația $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ este o aplicație *biliniară* dacă

$$g(\alpha x + \beta y, z) = \alpha g(x, z) + \beta g(y, z)$$

$$g(x, \alpha y + \beta z) = \alpha g(x, y) + \beta g(x, z)$$

oricare ar fi $x, y, z \in V$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

3.3.4 Propoziție. Orice aplicație biliniară $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ este un tensor de tip $(0, 2)$ ale cărui coordonate în baza $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ sunt numerele $g_{ij} = g(e_i, e_j)$.

Demonstrație. Avem

$$g'_{ij} = g(e'_i, e'_j) = g(\alpha_i^k e_k, \alpha_j^m e_m) = \alpha_i^k \alpha_j^m g(e_k, e_m) = \alpha_i^k \alpha_j^m g_{km}.$$

3.3.5 Definiție. Aplicația $g : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ este numită aplicație *biliniară* dacă este liniară în fiecare argument, adică

$$g(\alpha \varphi + \beta \psi, x) = \alpha g(\varphi, x) + \beta g(\psi, x)$$

$$g(\varphi, \alpha x + \beta y) = \alpha g(\varphi, x) + \beta g(\varphi, y)$$

oricare ar fi $\varphi, \psi \in V^*$, $x, y \in V$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

3.3.6 Propoziție Orice aplicație biliniară $g : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ este un tensor de tip $(1, 1)$ ale cărui coordonate într-o bază $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ cu duala $\mathfrak{B}^* = \{e^1, e^2, \dots, e^n\}$ sunt $g_j^i = g(e^i, e_j)$.

Demonstrație. Avem

$$g_j^i = g(e^i, e'_j) = g(\beta_k^i e^k, \alpha_j^m e_m) = \beta_k^i \alpha_j^m g(e^k, e_m) = \beta_k^i \alpha_j^m g_m^k.$$

3.3.7 Propoziție Orice tensor de tip $(1, 1)$ poate fi identificat cu o aplicație biliniară

$$g : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Demonstrație. Folosind coordonatele T_j^i ale tensorului T de tip $(1, 1)$ într-o bază fixată $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ cu duala $\mathfrak{B}^* = \{e^1, e^2, \dots, e^n\}$ definim aplicația biliniară

$$g : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{K}, \quad g(\varphi, x) = g(\varphi_i e^i, x^j e_j) = T_j^i \varphi_i x^j.$$

Aplicația g astfel definită nu depinde de alegerea bazei $\mathfrak{B}$ utilizate deoarece alegând altă bază $\mathfrak{B}'$ obținem

$$\begin{aligned} g(\varphi'_k e'^k, x'^m e'_m) &= T_m^k \varphi'_k x'^m = \beta_a^k \alpha_m^b T_b^a \alpha_k^i \varphi_i \beta_j^m x^j \\ &= \delta_a^i \delta_j^b T_b^a \varphi_i x^j = T_j^i \varphi_i x^j. \end{aligned}$$

3.3.8 Rezultatele prezentate mai sus pot fi generalizate în mod natural. Orice aplicație $(p + q)$ -liniară

$$T : \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{p \text{ ori}} \times \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{q \text{ ori}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

este un tensor de tip (p, q) ale cărui coordonate într-o bază $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ cu duala $\mathfrak{B}^* = \{e^1, e^2, \dots, e^n\}$ sunt

$$T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = T(e^{i_1}, e^{i_2}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_q})$$

și fiecărui tensor de tip (p, q) îi corespunde în mod natural o astfel de aplicație $(p + q)$ -liniară.

3.3.9 Plecând de la dualul V^* al lui V se poate defini dualul dualului lui V

$$V^{**} = (V^*)^*$$

numit *bidualul* lui V . Spațiul V^{**} se poate identifica (a se vedea pag. 95-10) în mod natural cu V asociind lui $x \in V$ aplicația liniară

$$V^* \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \mapsto \varphi(x)$$

aparținând bidualului lui V .

3.3.10 Dacă $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{K}$ și $\psi : W \longrightarrow \mathbb{K}$ sunt aplicații liniare atunci

$$g : V \times W \longrightarrow \mathbb{K}, \quad g(v, w) = \varphi(v) \cdot \psi(w)$$

este o aplicație biliniară numită *produsul tensorial* al lui φ cu ψ și notată cu $\varphi \otimes \psi$.

Capitolul 4

Spații Hilbert finit-dimensionale

4.1 Spații cu produs scalar

4.1.1 Definiție. Fie V un spațiu vectorial real (adică $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Prin *produs scalar* pe V se înțelege o aplicație

$$\langle, \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât

- a) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in V \text{ și } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- b) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \forall x, y \in V$
- a) $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in V \text{ și}$
 $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$

4.1.2 Definiție. Fie V un spațiu vectorial complex (adică $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Prin *produs scalar* pe V se înțelege o aplicație

$$\langle, \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

astfel încât

- a) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in V \text{ și } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- b) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad \forall x, y \in V$
- a) $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in V \text{ și}$
 $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$

4.1.3 În cazul produsului scalar definit pe un spațiu vectorial complex,

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \overline{\langle z, \alpha x + \beta y \rangle} = \bar{\alpha} \overline{\langle z, x \rangle} + \bar{\beta} \overline{\langle z, y \rangle} = \bar{\alpha} \langle x, z \rangle + \bar{\beta} \langle y, z \rangle.$$

4.1.4 Teoremă (Inegalitatea Cauchy).

Dacă $\langle, \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ este produs scalar atunci

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

oricare ar fi $x, y \in V$.

Demonstrație. Relația este evident verificată în cazul $y = 0$. Dacă $y \neq 0$ atunci

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

adică

$$\langle x, x \rangle + \bar{\lambda} \langle y, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle y, y \rangle \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Alegând

$$\lambda = -\frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

relația devine

$$\langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \geq 0.$$

adică $\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \geq |\langle x, y \rangle|^2$.

4.1.5 Definiție. Fie V un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$.

Prin *normă* pe V se înțelege o aplicație

$$\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât

- a) $\|x\| \geq 0$ oricare ar fi $x \in V$ și
 $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in V$
- c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, oricare ar fi $x, y \in V$.

4.1.6 Propoziție. Dacă $\langle, \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ este produs scalar atunci

$$\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

este o normă pe V .

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0 \quad \text{și} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0 \\
\|\alpha x\| &= \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle} = |\alpha| \|x\| \\
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= \|x\|^2 + 2 \Re \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 |\Re \langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

deoarece

$$|\Re(a + ib)| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |a + ib|$$

și conform inegalității Cauchy $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} = \|x\| \|y\|$.

4.1.7 Definiție. Prin *distanță* pe o mulțime nevidă M se înțelege o aplicație

$$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu proprietățile

- a) $d(x, y) \geq 0$ oricare ar fi $x, y \in M$ și
 $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- b) $d(x, y) = d(y, x)$, oricare ar fi $x, y \in M$
- c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, oricare ar fi $x, y, z \in M$.

4.1.8 Propoziție. Dacă $\langle, \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ este produs scalar atunci

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

este o distanță pe V .

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned}
d(x, y) = \|x - y\| &\geq 0 \quad \text{și} \quad d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y \\
d(x, y) = \|x - y\| &= \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x) \\
d(x, y) = \|x - y\| &= \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).
\end{aligned}$$

4.1.9 Definiție. Un spațiu vectorial înzestrat cu o normă este numit *spațiu normat*.

O mulțime înzestrată cu o distanță este numită *spațiu metric*.

4.1.10 Orice spațiu cu produs scalar are o structură naturală de spațiu normat și orice spațiu normat are o structură naturală de spațiu metric.

4.1.11 MATHEMATICA: EuclideanDistance[{a, b, c}, {x, y, z}]

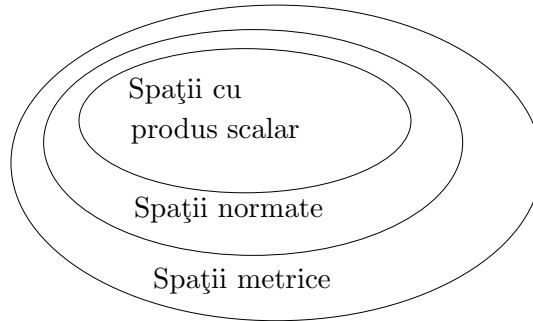


Figura 4.1: Spații metrice.

```

In[1]:=EuclideanDistance[{a, b, c}, {x, y, z}]
      ↦ Out[1]=√Abs[a-x]²+Abs[b-y]²+Abs[c-z]²
In[2]:=EuclideanDistance[{1,2,3}, {4,5,6}]    ↦ Out[2]=3√3

```

4.2 Baze ortonormate

4.2.1 Definiție. Prin *vector unitar* sau *versor* se înțelege un vector x cu $\|x\| = 1$.

4.2.2 Folosind norma asociată produsului scalar, inegalitatea Cauchy se poate scrie

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

În cazul unui spațiu vectorial real, dacă $x \neq 0$ și $y \neq 0$ atunci

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1.$$

Numărul $\varphi \in [0, \pi]$ cu proprietatea

$$\cos \varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

este numit *unghiul dintre x și y* . Relația anterioară se mai poate scrie

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \varphi.$$

4.2.3 MATHEMATICA: VectorAngle[u,v]

```

In[1]:=VectorAngle[{1, 2}, {2, -1}]    ↦ Out[1]=π/2
In[2]:=VectorAngle[{1, 1, 0}, {1, 1, 1}] ↦ Out[2]=ArcCos[√(2/3)]

```

4.2.4 Definiție. Fie V un spațiu vectorial și $M \subseteq V$ o submulțime de vectori.

Spunem că vectorii $x, y \in V$ sunt *ortogonali* și scriem $x \perp y$ dacă $\langle x, y \rangle = 0$.

Spunem că $x \in V$ este *ortogonal pe* M și scriem $x \perp M$ dacă $x \perp y, \quad \forall y \in M$.

4.2.5 Definiție. Fie V un spațiu vectorial și $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset V$.

Spunem că $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ este un *sistem ortogonal* dacă

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{oricare ar fi } i \neq j \text{ din } \{1, 2, \dots, k\}.$$

Spunem că $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ este un *sistem ortonormat* dacă

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j. \end{cases}$$

4.2.6 Normalizând vectorul $x = (1, 2, 3)$ obținem vectorul unitar

$$\frac{1}{\sqrt{\langle x, x \rangle}} x = \frac{1}{\sqrt{14}} (1, 2, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right).$$

4.2.7 MATHEMATICA: `Normalize[x]`

$$\text{In}[1] := \text{Normalize}[\{1, 2, 3\}] \quad \mapsto \quad \text{Out}[1] = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

4.2.8 Propoziție.

Orice sistem de vectori ortogonali nenuli este un sistem liniar independent.

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ un sistem ortogonal de vectori nenuli. Din

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

rezultă că

$$0 = \langle v_1, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \alpha_2 \langle v_1, v_2 \rangle + \dots + \alpha_k \langle v_1, v_k \rangle = \alpha_1 \|v_1\|^2.$$

Deoarece $v_1 \neq 0$ se obține $\alpha_1 = 0$. Similar se arată că $\alpha_2 = 0, \dots, \alpha_k = 0$.

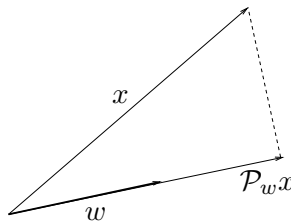


Figura 4.2: Proiecția ortogonală a vectorului x pe w .

4.2.9 Propoziție. Proiecția ortogonală a vectorului x pe vectorul $w \neq 0$ este

$$\mathcal{P}_w x = \frac{\langle w, x \rangle}{\langle w, w \rangle} w.$$

Demonstrație. Proiecția lui x pe w este un vector de forma λw . Impunând ca proiecția să fie ortogonală, adică $(x - \lambda w) \perp w$, obținem relația $\langle w, x - \lambda w \rangle = 0$ care conduce la $\lambda = \langle w, x \rangle / \langle w, w \rangle$ (a se vedea Figura 4.2).

4.2.10 Dacă $\|w\| = 1$ atunci proiecția lui x pe w este vectorul $\mathcal{P}_w x = \langle w, x \rangle w$.

4.2.11 Proiecția ortogonală a vectorului $x = (1, 2, 3)$ pe $w = (1, 1, 1)$ este

$$\mathcal{P}_{(1,1,1)}(1, 2, 3) = \frac{\langle (1,1,1), (1,2,3) \rangle}{\langle (1,1,1), (1,1,1) \rangle} (1, 1, 1) = (2, 2, 2).$$

4.2.12 MATHEMATICA: Projection[x, w]

$$\text{In}[1] := \text{Projection}[\{1, 2, 3\}, \{1, 1, 1\}] \quad \mapsto \quad \text{Out}[1] = (2, 2, 2)$$

4.2.13 Teoremă (Metoda de ortogonalizare Gram-Schmidt).

Dacă $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ este sistem liniar independent atunci $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, unde

$$w_1 = u_1$$

$$w_2 = u_2 - \frac{\langle w_1, u_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

.....

$$w_n = u_n - \frac{\langle w_1, u_n \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle w_2, u_n \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \dots - \frac{\langle w_{n-1}, u_n \rangle}{\langle w_{n-1}, w_{n-1} \rangle} w_{n-1}$$

este un sistem ortogonal astfel încât

$$\text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_k\} = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$$

oricare ar fi $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Demonstrație. Avem

$$\langle w_2, w_1 \rangle = \left\langle u_2 - \frac{\langle w_1, u_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1, w_1 \right\rangle = \langle u_2, w_1 \rangle - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \langle w_1, w_1 \rangle = 0.$$

Similar se arată că oricare vector w_k este ortogonal pe vectorii $w_1, w_2, \dots, w_{k-1}$.

4.2.14 Teoremă (Metoda de ortonormalizare Gram-Schmidt).

Dacă $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ este sistem liniar independent atunci $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, unde

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$v_2 = \frac{u_2 - \langle v_1, u_2 \rangle v_1}{\|u_2 - \langle v_1, u_2 \rangle v_1\|}$$

.....

$$v_n = \frac{u_n - \langle v_1, u_n \rangle v_1 - \langle v_2, u_n \rangle v_2 - \dots - \langle v_{n-1}, u_n \rangle v_{n-1}}{\|u_n - \langle v_1, u_n \rangle v_1 - \langle v_2, u_n \rangle v_2 - \dots - \langle v_{n-1}, u_n \rangle v_{n-1}\|}$$

este un sistem ortonormat astfel încât

$$\text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_k\} = \text{span} \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$$

oricare ar fi $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Demonstrație. Prin calcul direct se arată că $v_2 \perp v_1$, apoi $v_3 \perp v_1$ și $v_3 \perp v_2$, etc.

4.2.15 Ortonormalizând sistemul de vectori

$$\{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

obținem sistemul ortonormat

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0, 0, 1) \right\}.$$

4.2.16 MATHEMATICA: Orthogonalize[{u1,u2,...,un}]

$$\text{In}[1] := \text{Orthogonalize}[\{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\}] \mapsto \text{Out}[1] = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0, 0, 1) \right\}$$

4.2.17 Definiție. Prin bază ortonormată se înțelege o bază $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ cu

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

adică o bază care este în același timp sistem ortonormat.

4.2.18 Din teorema precedentă rezultă că, în cazul oricărui spațiu cu produs scalar, există baze ortonormate.

4.2.19 Teoremă Dacă $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este bază ortonormată atunci

$$x = \sum_{i=1}^n \langle v_i, x \rangle v_i$$

și

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle \langle v_i, y \rangle, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\langle v_i, x \rangle|^2}$$

oricare ar fi vectorii x și y .

Demonstrație. Orice vector $x \in V$ se poate scrie ca o combinație liniară

$$x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$$

și avem

$$\langle v_k, x \rangle = \left\langle v_k, \sum_{i=1}^n x_i v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle v_k, v_i \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ik} = x_k$$

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle v_i, x \rangle v_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle \langle v_i, y \rangle$$

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle \langle v_i, x \rangle = \sum_{i=1}^n |\langle x, v_i \rangle|^2.$$

4.2.20 Propoziție. Fie V un spațiu cu produs scalar și $M \subset V$ o submulțime.

Mulțimea vectorilor ortogonali pe M

$$M^\perp = \{x \in V \mid x \perp u, \quad \forall u \in M\}$$

este un subspațiu vectorial.

Demonstrație. Oricare ar fi $x \in M$ avem

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in M^\perp \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \implies \langle u, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle u, x \rangle + \beta \langle u, y \rangle = 0$$

și prin urmare $\alpha x + \beta y \in M^\perp$.

4.2.21 Teoremă. Dacă V un spațiu cu produs scalar și $W \subset V$ un subspațiu atunci

$$V = W \oplus W^\perp.$$

Demonstrație. Dacă $x \in W \cap W^\perp$ atunci $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0$, ceea ce conduce la $W \cap W^\perp = \{0\}$. Este suficient să mai arătăm că $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$. Plecăm de la o bază ortonormată $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ a lui W pe care apoi o completăm până la o bază $\{v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_{n-k}\}$ a lui V . Ortonormalizând această bază prin metoda Gram-Schmidt obținem o bază ortonormată $\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$ a lui V . Se constată imediat că $\{v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$ este bază a lui $W^\perp$ și prin urmare $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

4.3 Dualul unui spațiu cu produs scalar

4.3.1 Propoziție. *In cazul unui spațiu cu produs scalar V avem*

$$\begin{aligned} \langle x, u \rangle = \langle y, u \rangle \\ \forall u \in V \end{aligned} \implies x = y.$$

Demonstrație. Alegând $u = x - y$ obținem

$$\langle x, x - y \rangle = \langle y, x - y \rangle \implies \langle x - y, x - y \rangle = 0 \implies \|x - y\| = 0 \implies x = y.$$

4.3.2 Teoremă. *Fie V un spațiu cu produs scalar. Pentru orice formă liniară*

$$\varphi : V \longrightarrow \mathbb{C}$$

există $a \in V$ unic determinat astfel încât

$$\varphi(x) = \langle a, x \rangle, \quad \text{oricare ar fi } x \in V.$$

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază ortonormată. Din relația

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(v_i) = \left\langle \sum_{j=1}^n \overline{\varphi(v_j)} v_j, \sum_{i=1}^n x_i v_i \right\rangle$$

rezultă că

$$a = \sum_{j=1}^n \overline{\varphi(v_j)} v_j$$

îndeplinește condițiile cerute. Unicitatea lui a rezultă din propoziția anterioară.

4.3.3 Din unicitatea lui a rezultă în plus că vectorul $\sum_{j=1}^n \overline{\varphi(v_j)} v_j$ definit cu ajutorul unei baze nu depinde de baza ortonormată aleasă.

4.3.4 In cazul unui spațiu cu produs scalar V avem

$$V^* = \{ V \longrightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \langle a, x \rangle \mid a \in V \}.$$

4.3.5 Notăția lui Dirac. In cazul particular $V = \mathbb{C}^n$, produsul scalar a doi vectori

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{și} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

se poate scrie utilizând produsul a două matrice sub forma

$$\langle x, y \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_n y_n = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Utilizând notațiile

$$\langle x| = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad |y\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

obținem

$$\langle x|y\rangle = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_n y_n.$$

4.3.6 Din relația

$$V \longrightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \langle a, x \rangle$$

scrisă sub forma

$$V \longrightarrow \mathbb{C} : |x\rangle \mapsto \langle a|x\rangle$$

rezultă că $\langle a|$ reprezintă o formă liniară.

4.3.7 Dacă $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este bază ortonormată atunci (vezi pag. 119-19)

$$x = \sum_{i=1}^n \langle v_i, x \rangle v_i \quad \text{oricare ar fi } x \in V.$$

Utilizând notația lui Dirac, această relație se poate scrie

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^n \langle v_i|x\rangle |v_i\rangle \quad \text{oricare ar fi } |x\rangle \in V$$

sau

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^n |v_i\rangle \langle v_i|x\rangle \quad \text{oricare ar fi } |x\rangle \in V$$

sau, utilizând operatorul identitate $\mathbb{I} : V \longrightarrow V$, $\mathbb{I}|x\rangle = |x\rangle$, sub forma

$$\mathbb{I} = \sum_{i=1}^n |v_i\rangle \langle v_i|. \quad (4.1)$$

Relația (4.1) este numită *rezoluția identității* corespunzătoare bazei $\mathfrak{B}$.

4.3.8 Relația (4.1) corespunde în cazul bazei canonice

$$\mathfrak{B} = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)\}$$

a lui $\mathbb{R}^3$ egalității

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1)$$

4.3.9 Relația referitoare la proiecția ortogonală pe un vector unitar w

$$\mathcal{P}_w x = \langle w, x \rangle w$$

se mai poate scrie sub forma

$$\mathcal{P}_w |x\rangle = |w\rangle \langle w|x\rangle$$

și conduce la definiția

$$\mathcal{P}_w = |w\rangle \langle w|$$

pentru *proiectorul ortogonal* pe subspațiul unidimensional generat de w .

4.3.10 Dacă $\mathfrak{B} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ este bază ortonormată
atunci $\{\langle v_1|, \langle v_2|, \dots, \langle v_n|\}$ este duala ei deoarece

$$\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

În particular, din relația (4.1) rezultă

$$\langle a| = \sum_{i=1}^n \langle a | v_i \rangle \langle v_i|.$$

4.3.11 Definiție. Prin *adjuncta* matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$$

se înțelege complex conjugata transpusei lui A , adică matricea

$$A^* = {}^t \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1m} & \bar{a}_{2m} & \cdots & \bar{a}_{nm} \end{pmatrix}.$$

4.3.12 Propoziție. Dacă $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ atunci relațiile

$$A A^* = I, \quad A^* A = I, \quad A^{-1} = A^*$$

unde I este matricea unitate, sunt echivalente.

Demonstrație. Dacă $A A^* = I$ atunci A este inversabilă

$$A A^* = I \implies \det A \det A^* = \det I = 1 \implies \det A \neq 0$$

și înmulțind relația $A A^* = I$ cu A^{-1} la stânga rezultă $A^{-1} = A^*$. Similar, dacă $A^* A = I$ atunci A este inversabilă

$$A^* A = I \implies \det A^* \det A = \det I = 1 \implies \det A \neq 0$$

și înmulțind relația $A^* A = I$ cu A^{-1} la dreapta rezultă $A^{-1} = A^*$. Evident, relația $A^{-1} = A^*$ implică celelalte două relații.

4.3.13 Definiție. Matricea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ este numită *matrice unitară* dacă

$$A^* A = I$$

(condiție echivalentă cu $A^{-1} = A^*$ și cu $A A^* = I$).

4.3.14 Dacă A este o matrice unitară atunci $|\det A| = 1$. Intr-adevăr

$$A^* A = I \implies \det A \det A^* = 1 \implies |\det A|^2 = 1.$$

4.3.15 Teoremă. Mulțimea matricelor unitare de ordinul n

$$U(n) = \{ A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid A^* A = I \}$$

are o structură de grup în raport cu înmulțirea matricelor, iar

$$SU(n) = \{ A \in U(n) \mid \det A = 1 \}$$

este un subgrup al lui $U(n)$.

Demonstrație. a) Produsul a două matrice unitare A și B este o matrice unitară

$$(AB)^* (AB) = B^* A^* AB = B^* B = I$$

și inversa unei matrice unitare A este o matrice unitară

$$A^{-1} = A^* \implies (A^{-1})^* = (A^*)^* = A = (A^{-1})^{-1}.$$

b) Afirmția rezultă din relațiile

$$\det(AB) = \det A \det B, \quad \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

4.3.16 Teoremă.

Matricea de trecere între două baze ortonormate este o matrice unitară.

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ și $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ două baze ortonormate și fie

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad S^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{11} & \cdots & \bar{\alpha}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\alpha}_{1n} & \cdots & \bar{\alpha}_{nn} \end{pmatrix}$$

matricea de trecere între cele două baze și adjuncta ei, adică

$$v'_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} v_i.$$

Avem

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \langle v'_i, v'_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} v_k, \sum_{m=1}^n \alpha_{mj} v_m \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \bar{\alpha}_{ki} \alpha_{mj} \langle v_k, v_m \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \bar{\alpha}_{ki} \alpha_{mj} \delta_{km} = \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_{ki} \alpha_{kj} \end{aligned}$$

relație echivalentă cu $S^* S = I$.

4.3.17 Noțiuni similare cu proprietăți similare se pot defini în cazul real.

4.3.18 Propoziție. Dacă $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ atunci relațiile

$$A^t A = I, \quad {}^t A A = I, \quad A^{-1} = {}^t A$$

unde I este matricea unitate, sunt echivalente.

4.3.19 Definiție. Matricea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ este numită *matrice ortogonală* dacă

$${}^t A A = I$$

(condiție echivalentă cu $A^{-1} = {}^t A$ și cu $A^t A = I$).

4.3.20 Dacă A este o matrice ortogonală atunci $\det A \in \{-1, 1\}$.

4.3.21 Teoremă. Mulțimea matricelor ortogonale de ordinul n

$$O(n) = \left\{ A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid {}^t A A = I \right\}$$

are o structură de grup în raport cu înmulțirea matricelor, iar

$$SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det A = 1 \}$$

este un subgrup al lui $O(n)$.

4.3.22 Teoremă. În cazul unui spațiu vectorial real cu produs scalar, matricea de trecere între două baze ortonormate este o matrice ortogonală.

4.4 Sisteme de vectori coerenți

4.4.1 În $\mathbb{R}^2$ vectorii corespunzători vârfurilor unui triunghi echilateral

$$w_0 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right), \quad w_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad w_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

deși nu formează o bază ortonormată, verifică relația remarcabilă

$$\mathbb{I} = \sum_{i=0}^2 |w_i\rangle\langle w_i|$$

adică, în scriere matriceală, relația

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Alegând în locul vectorilor w_i vectorii unitari corespunzători

$$u_i = \frac{1}{\|w_i\|} w_i$$

adică (a se vedea Figura 4.3)

$$u_0 = (1, 0), \quad u_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad u_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

obținem relația

$$\mathbb{I} = \frac{2}{3} \sum_{i=0}^2 |u_i\rangle\langle u_i|.$$

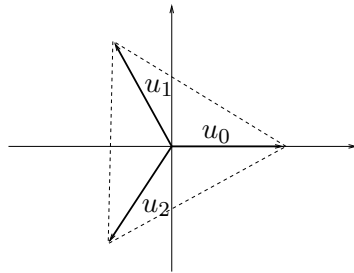


Figura 4.3: Sistemul de vectori coerenți u_0, u_1, u_2 .

4.4.2 Definiție. Fie V un spațiu cu produs scalar n -dimensional. Spunem că $\{u_0, u_1, \dots, u_{k-1}\}$ este un *sistem finit de vectori coerenți*

(*finite frame*, în engleză) dacă vectorii u_i sunt unitari

$$\|u_i\| = 1 \quad \text{oricare ar fi } i = 0, 1, \dots, k-1$$

și are loc rezoluția identității

$$\mathbb{I} = \frac{n}{k} \sum_{i=0}^{k-1} |u_i\rangle\langle u_i|. \quad (4.2)$$

4.4.3 Teoremă . Fie V un spațiu cu produs scalar n -dimensional. Dacă

$\{u_0, u_1, \dots, u_{k-1}\}$ este sistem de vectori coerenți atunci

$$\begin{aligned} |x\rangle &= \frac{n}{k} \sum_{i=0}^{k-1} |u_i\rangle\langle u_i|x\rangle & \langle x| &= \frac{n}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \langle x|u_i\rangle\langle u_i| \\ \langle x|y\rangle &= \frac{n}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \langle x|u_i\rangle\langle u_i|y\rangle & \|x\|^2 &= \frac{n}{k} \sum_{i=0}^{k-1} |\langle x|u_i\rangle|^2. \end{aligned}$$

oricare ar fi $x, y \in V$.

Demonstrație. Relațiile din enunț sunt consecințe directe ale relației (4.2).

4.4.4 Exercițiu. Vectorii corespunzând vârfurilor unui tetraedru regulat

$$\begin{aligned} u_0 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), & u_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ u_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), & u_3 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

formează un sistem de vectori coerenți în $\mathbb{R}^3$.

4.4.5 Exercițiu. Vectorii corespunzând vârfurilor unui icosaedru regulat

$$\begin{aligned} \frac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}}(1, \tau, 0), & \quad \frac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}}(-1, \tau, 0), \\ \frac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}}(\tau, 0, 1), & \quad \frac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}}(\tau, 0, -1), \\ \frac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}}(0, 1, \tau), & \quad \frac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}}(0, -1, \tau) \end{aligned}$$

definiți utilizând ‘numărul de aur’ $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\dots$,
formează un sistem de vectori coerenți în $\mathbb{R}^3$.

4.4.6 Exercițiu. Vectorii corespunzând vârfurilor unui poligon regulat cu k laturi

$$u_m = \left(\cos \frac{2m\pi}{k}, \sin \frac{2m\pi}{k}\right) \quad \text{unde } m = 0, 1, \dots, k-1$$

formează un sistem de vectori coerenți în $\mathbb{R}^2$ astfel încât

$$\mathbb{I} = \frac{2}{k} \sum_{m=0}^{k-1} |u_m\rangle\langle u_m|.$$

4.4.7 Exercițiu. Sistemul infinit de vectori

$$u(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{unde } t \in [0, 2\pi)$$

formează un sistem de vectori coerenți în $\mathbb{R}^2$ astfel încât

$$\mathbb{I} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dt |u(t)\rangle \langle u(t)|.$$

4.4.8 Exercițiu. În spațiul $L^2(\mathbb{R})$, sistemul infinit de vectori (vezi pag. 221-53)

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \text{unde } z \in \mathbb{C}$$

definit plecând de la o bază ortonormată $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots\}$, formează un sistem de vectori coerenți în $L^2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$\mathbb{I} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d\Re z d\Im z |z\rangle \langle z|.$$

4.4.9 Sistemul infinit de vectori din exercițiul anterior, numit sistemul de *stări coerente Schrödinger-Klauder-Glauber* sau *sistemul de stări coerente canonic* sau *sistemul de stări coerente standard*, joacă un rol fundamental în mecanica cuantică, optică și în general, în modelele cuantice din fizică [9, 20].

4.5 Spații Hilbert

4.5.1 Orice spațiu cu produs scalar are o structură de spațiu normat și una de spațiu metric definite prin

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \text{și} \quad d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

4.5.2 Definiție. Fie V un spațiu cu produs scalar și $(x_k)_{k \geq 0}$ un șir din V . Spunem că șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ este *convergent* cu limita a dacă

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\| = 0$$

adică dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\|x_k - a\| < \varepsilon \quad \text{oricare ar fi } k \geq k_\varepsilon.$$

4.5.3 Definiție. Fie V un spațiu cu produs scalar și $(x_k)_{k \geq 0}$ un șir din V .

Spunem că șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ este *șir Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\|x_k - x_\ell\| < \varepsilon \quad \text{oricare ar fi} \quad \begin{matrix} k \geq k_\varepsilon \\ \ell \geq k_\varepsilon. \end{matrix}$$

4.5.4 Propoziție. Orice șir convergent este șir Cauchy.

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Dacă $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ atunci există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\|x_k - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{oricare ar fi} \quad k \geq k_\varepsilon$$

și prin urmare

$$\|x_k - x_\ell\| = \|x_k - a + a - x_\ell\| \leq \|x_k - a\| + \|x_\ell - a\| < \varepsilon$$

oricare ar fi $k \geq k_\varepsilon$ și $\ell \geq k_\varepsilon$.

4.5.5 Definiție.

Un spațiu în care orice șir Cauchy este convergent este numit *spațiu complet*.

Un spațiu normat complet este numit *spațiu Banach*.

Un spațiu cu produs scalar complet este numit *spațiu Hilbert*.

4.5.6 În funcție de corpul scalarilor corespunzător, un spațiu Hilbert poate fi *spațiu Hilbert real* sau *spațiu Hilbert complex*. În continuare, dacă nu se specifică contrariul, prin *spațiu Hilbert* vom înțelege un spațiu Hilbert complex.

4.5.7 Exemple. Oricare ar fi $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ spațiul $\mathbb{R}^n$ înzestrat cu produsul scalar

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

este un spațiu Hilbert real de dimensiune n .

Oricare ar fi $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ spațiul $\mathbb{C}^n$ înzestrat cu produsul scalar

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_n y_n = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k$$

este un spațiu Hilbert de dimensiune n .

4.5.8 Definiție. Fie V și W două spații cu produs scalar peste același corp $\mathbb{K}$.

O aplicație liniară $T: V \rightarrow W$ este numită *izometrie liniară* dacă

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{oricare ar fi } x, y \in V.$$

4.5.9 Orice izometrie liniară este o aplicație injectivă deoarece

$$Tx=0 \Rightarrow \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$$

4.5.10 Definiție. Spunem despre două spații cu produs scalar V și W că sunt *izomorfe* dacă există o izometrie liniară bijectivă $T: V \rightarrow W$.

4.5.11 Teoremă *Orice spațiu vectorial real de dimensiune n cu produs scalar este izomorf cu spațiul Hilbert real $\mathbb{R}^n$.
Orice spațiu vectorial complex de dimensiune n cu produs scalar este izomorf cu spațiul Hilbert $\mathbb{C}^n$.*

Demonstrație. Dacă $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază ortonormată atunci are loc relația

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle \langle v_i, y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\langle v_i, x \rangle} \langle v_i, y \rangle$$

care arată că izomorfismul liniar

$$\begin{aligned} V &\rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (\langle v_1, x \rangle, \langle v_2, x \rangle, \dots, \langle v_n, x \rangle) && \text{și respectiv} \\ V &\rightarrow \mathbb{C}^n : x \mapsto (\langle v_1, x \rangle, \langle v_2, x \rangle, \dots, \langle v_n, x \rangle) \end{aligned}$$

este un izomorfism de spații cu produs scalar care permite identificarea lui V cu $\mathbb{R}^n$ și respectiv $\mathbb{C}^n$.

4.5.12 Orice spațiu vectorial complex finit-dimensional cu produs scalar este spațiu Hilbert. În cazul finit-dimensional, putem utiliza termenul de spațiu Hilbert în loc de cel de spațiu vectorial complex cu produs scalar, fără a restrânge generalitatea.

4.5.13 Orice spațiu Hilbert finit-dimensional se poate identifica cu unul dintre spațiile Hilbert $\mathbb{C}^n$. Toate spațiile Hilbert de dimensiune n sunt izomorfe. Ele sunt reprezentări care diferă doar prin natura elementelor ale aceluiași spațiu Hilbert.

4.5.14 Propoziție. *Suma directă a două spații Hilbert*

$$V \oplus W = \{ (x, y) \mid x \in V, y \in W \}$$

este un spațiu Hilbert cu produsul scalar

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = \langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle.$$

Demonstrație. Verificare directă bazată pe definiția produsului scalar.

4.5.15 Dacă $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ sunt baze ortonormate în V și W atunci

$$\{(v_1, 0), (v_2, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), (0, w_2), \dots, (0, w_k)\}$$

este bază ortonormată în $V \oplus W$.

4.5.16 Exemple. Avem $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, etc.

4.5.17 Prin $\mathbb{C}^n$ înțelegem, în funcție de context, atât spațiul Hilbert

$$\mathbb{C}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}\}$$

identificat cu spațiul Hilbert al matricelor linie

$$\mathbb{C}^n = \{(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}\}$$

cât și spațiul Hilbert al matricelor coloană

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = {}^t(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \mid x^1, x^2, \dots, x^n \in \mathbb{C} \right\}.$$

4.5.18 Izomorfismul liniar $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^{nm}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \mapsto {}^t(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}, a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}, \dots, a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm})$$

devine un izomorfism de spații cu produs scalar dacă înzestram spațiul vectorial complex $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ cu produsul scalar

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{ij} \bar{a}_{ij} b_{ij}$$

adică dacă definim

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^* B)$$

unde A^* este *adjuncta* matricei A , adică complex conjugata transpusei lui A . Spațiul $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ devine astfel un spațiu Hilbert izomorf cu spațiul Hilbert $\mathbb{C}^{nm}$.

4.5.19 Propoziție (Identitatea paralelogramului).

Dacă V este un spațiu cu produs scalar atunci

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

oricare ar fi $x, y \in V$.

Demonstrație. Se utilizează relația $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$.

4.5.20 Definiție. Fie V un spațiu vectorial și $M \subset V$ o submulțime.

Spunem că M este *mulțime convexă* dacă

$$\{ (1-t)x + ty \mid t \in [0, 1] \} \subset M$$

oricare ar fi $x, y \in M$.

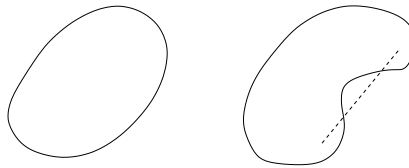


Figura 4.4: Mulțime convexă și mulțime neconvexă.

4.5.21 Definiție. Fie V un spațiu normat, $x \in V$ și $M \subset V$ o submulțime.

Prin *distanța de la x la M* se înțelege numărul

$$\delta(x, M) = \inf_{u \in M} \|x - u\|.$$

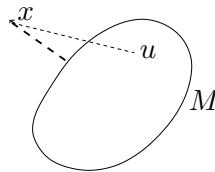


Figura 4.5: Distanța de la x la M .

4.5.22 Teoremă Dacă V este un spațiu Hilbert, $M \subset V$ este o mulțime convexă închisă și $x \notin M$ atunci există un element unic $y \in M$ astfel încât

$$\delta(x, M) = \|x - y\|.$$

Demonstrație. Fie $\delta = \delta(x, M)$. Arătăm mai întâi că $\delta > 0$. Presupunând că $\delta = 0$ rezultă că pentru orice $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ există $x_n \in M$ astfel încât $\|x - x_n\| < \frac{1}{n}$ și prin urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Deoarece M este închisă ar rezulta că $x \in M$, în

contradicție cu ipoteza. Pentru fiecare $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ alegem $y_n \in M$ astfel încât

$$\delta \leq \|x - y_n\| < \delta + \frac{1}{n} \quad (4.3)$$

și arătăm că $(y_n)_{n \geq 1}$ este șir Cauchy. Scriind identitatea paralelogramului

$$2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 = \|y_n - y_m\|^2 + \|2x - y_n - y_m\|^2$$

sub forma

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\left\|x - \left(\frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_m\right)\right\|^2$$

obținem că

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\left(\delta + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(\delta + \frac{1}{m}\right)^2 - 4\delta^2$$

adică

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq \frac{4\delta}{n} + \frac{4\delta}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} \leq \frac{4\delta + 2}{n} + \frac{4\delta + 2}{m}.$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$, alegând $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{8\delta}{N} < \varepsilon$, avem

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} n \geq N \\ m \geq N. \end{matrix}$$

Spațiul Hilbert V fiind complet, există $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ și y aparține mulțimii închise M . Trecând la limită în relația (4.3) obținem că $\delta = \|x - y\|$. Presupunând că există două elemente $y, y' \in M$ cu $\delta = \|x - y\| = \|x - y'\|$ și folosind identitatea paralelogramului deducem relația

$$\begin{aligned} 4\delta^2 &= 2\|x - y\|^2 + 2\|x - y'\|^2 = \|y - y'\|^2 + \|2x - y - y'\|^2 \\ &= \|y - y'\|^2 + 4\left\|x - \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y'\right)\right\|^2 \geq \|y - y'\|^2 + 4\delta^2 \end{aligned}$$

din care rezultă $y = y'$.

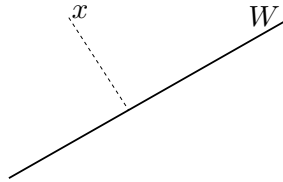


Figura 4.6: Distanța de la x la subspațiul W .

4.5.23 Orice subspațiu $W \subset V$ este o submulțime convexă și închisă. Conform teoremei, pentru $x \notin W$ există $y \in W$ unic astfel încât (a se vedea Figura 4.6)

$$\delta(x, W) = \|x - y\|.$$

Arătăm în plus despre vectorul $z = x - y$ că $z \perp W$. Oricare ar fi $u \in W$ și $\lambda \in \mathbb{C}$ avem

$$\|x - y - \lambda u\| \geq \|x - y\|, \quad \text{adică} \quad \langle x - y - \lambda u, x - y - \lambda u \rangle \geq \langle x - y, x - y \rangle.$$

Rezultă inegalitatea

$$-\bar{\lambda}\langle u, z \rangle - \lambda\langle z, u \rangle + |\lambda|^2\langle u, u \rangle \geq 0$$

care pentru $\lambda = \langle u, z \rangle / \langle u, u \rangle$ conduce la relația

$$-\frac{|\langle u, z \rangle|^2}{\langle u, u \rangle} \geq 0$$

posibilă doar dacă $\langle u, z \rangle = 0$.

4.6 Adjunctul unui operator

4.6.1 Teoremă. Fie V un spațiu Hilbert și $A: V \rightarrow V$ este un operator liniar.

Există un operator liniar $A^*: V \rightarrow V$ unic determinat astfel încât

$$\langle A^*x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \forall x, y \in V. \quad (4.4)$$

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază ortonormată. Pentru $x \in V$ fixat, aplicația

$$\varphi: V \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(y) = \langle x, Ay \rangle$$

este formă liniară. Știm că există

$$a = \sum_{j=1}^n \overline{\varphi(v_j)} v_j = \sum_{j=1}^n \overline{\langle x, Av_j \rangle} v_j = \sum_{j=1}^n \langle Av_j, x \rangle v_j$$

astfel încât $\varphi(y) = \langle a, y \rangle$, $\forall y \in V$. Punând $A^*x = a$, obținem operatorul liniar

$$A^*: V \rightarrow V, \quad A^*x = \sum_{j=1}^n \langle Av_j, x \rangle v_j$$

care verifică relația

$$\begin{aligned} \langle A^*x, y \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n \langle Av_j, x \rangle v_j, y \right\rangle = \sum_{j=1}^n \langle x, Av_j \rangle \langle v_j, y \rangle \\ &= \left\langle x, \sum_{j=1}^n \langle v_j, y \rangle Av_j \right\rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \forall x, y \in V. \end{aligned}$$

Presupunând că $B : V \longrightarrow V$ este un alt operator care verifică (4.4) obținem relația

$$\langle A^*x, y \rangle = \langle Bx, y \rangle, \quad \forall x, y \in V$$

din care rezultă $A^* = B$.

4.6.2 Definiție. Fie V un spațiu Hilbert și $A : V \longrightarrow V$ este un operator liniar.

Operatorul liniar $A^* : V \longrightarrow V$ unic determinat care verifică relația

$$\langle A^*x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

se numește *adjunctul* operatorului A .

4.6.3 În locul notației A^* se preferă uneori notația A^+ .

4.6.4 Propoziție. Fie V un spațiu Hilbert. Dacă $A, B : V \longrightarrow V$ sunt operatori liniari și $\lambda \in \mathbb{C}$ atunci

$$A + B : V \longrightarrow V, \quad (A + B)x = Ax + Bx$$

$$\lambda A : V \longrightarrow V, \quad (\lambda A)x = \lambda Ax$$

$$AB : V \longrightarrow V, \quad (AB)x = A(Bx)$$

sunt operatori liniari și

$$(A^*)^* = A, \quad (A + B)^* = A^* + B^*,$$

$$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*, \quad (AB)^* = B^* A^*.$$

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} (A + B)(\alpha x + \beta y) &= A(\alpha x + \beta y) + B(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay + \alpha Bx + \beta By \\ &= \alpha(A + B)x + \beta(A + B)y \end{aligned}$$

$$(\lambda A)(\alpha x + \beta y) = \lambda A(\alpha x + \beta y) = \lambda \alpha Ax + \lambda \beta Ay = \alpha(\lambda A)x + \beta(\lambda A)y$$

$$\begin{aligned} (AB)(\alpha x + \beta y) &= A(B(\alpha x + \beta y)) = A(\alpha Bx + \beta By) = \alpha A(Bx) + \beta A(By) \\ &= \alpha(AB)x + \beta(AB)y. \end{aligned}$$

Relația $(A^*)^* = A$ rezultă din

$$\langle (A^*)^*x, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle = \langle Ax, y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

Avem

$$\begin{aligned} \langle (A + B)^*x, y \rangle &= \langle x, (A + B)y \rangle = \langle x, Ay \rangle + \langle x, By \rangle \\ &= \langle A^*x, y \rangle + \langle B^*x, y \rangle = \langle (A^* + B^*)x, y \rangle \end{aligned}$$

adică pentru orice $x \in V$

$$\langle (A + B)^*x, y \rangle = \langle (A^* + B^*)x, y \rangle, \quad \forall y \in V$$

ceea ce conduce la $(A + B)^* = A^* + B^*$. Similar, pentru orice $x \in V$ avem

$$\begin{aligned}\langle (\lambda A)^* x, y \rangle &= \langle x, (\lambda A)y \rangle = \langle x, \lambda Ay \rangle = \bar{\lambda} \langle x, Ay \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle A^* x, y \rangle = \langle \bar{\lambda} A^* x, y \rangle = \langle (\bar{\lambda} A^*) x, y \rangle, \quad \forall y \in V\end{aligned}$$

și această relație conduce la

$$(\lambda A)^* x = (\bar{\lambda} A^*) x, \quad \forall x \in V$$

adică $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$. Oricare ar fi $x \in V$ avem relația

$$\begin{aligned}\langle (AB)^* x, y \rangle &= \langle x, (AB)y \rangle = \langle x, A(By) \rangle = \langle A^* x, By \rangle \\ &= \langle B^* (A^* x), y \rangle = \langle (B^* A^*) x, y \rangle, \quad \forall y \in V\end{aligned}$$

care conduce la $(AB)^* = B^* A^*$.

4.6.5 Propoziție. *Matricea adjunctului A^* al unui operator liniar $A: V \rightarrow V$ în raport cu o bază ortonormată este adjuncta matricei operatorului A în raport cu aceeași bază.*

Demonstrație. Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{pmatrix}$$

matricele lui A și A^* în raport cu baza ortonormată $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, adică

$$Av_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i, \quad A^* v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}^* v_i. \quad (4.5)$$

Conform formulei de reprezentare a unui vector în raport cu o bază ortonormată

$$u = \sum_{i=1}^n \langle v_i, u \rangle v_i$$

avem

$$Av_j = \sum_{i=1}^n \langle v_i, Av_j \rangle v_i, \quad A^* v_j = \sum_{i=1}^n \langle v_i, A^* v_j \rangle v_i \quad (4.6)$$

Din relațiile (4.5) și (4.6) rezultă

$$a_{ij} = \langle v_i, Av_j \rangle, \quad a_{ij}^* = \langle v_i, A^* v_j \rangle$$

ceea ce conduce la

$$a_{ij}^* = \langle v_i, A^* v_j \rangle = \langle Av_i, v_j \rangle = \overline{\langle v_j, Av_i \rangle} = \bar{a}_{ji}.$$

4.7 Transformări unitare și transformări ortogonale

4.7.1 Definiție. Fie V un spațiu Hilbert. Prin *transformare unitară* a lui V se înțelege o aplicație liniară $A: V \rightarrow V$ cu proprietatea

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

4.7.2 Transformările unitare păstrează nemodificată norma unui vector

$$\|Ax\| = \sqrt{\langle Ax, Ax \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|, \quad \forall x \in V.$$

4.7.3 Propoziție. Fie V un spațiu Hilbert și $A, B: V \rightarrow V$ aplicații liniare.

Dacă sunt transformări unitare atunci AB este transformare unitară.

Orice transformare unitară A este bijectivă și A^{-1} este transformare unitară.

Demonstrație. Dacă A și B sunt transformări unitare atunci

$$\langle (AB)x, (AB)y \rangle = \langle A(Bx), A(By) \rangle = \langle Bx, By \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

Dacă A este transformare unitară atunci $\ker A = \{0\}$

$$Ax = 0 \implies \|x\| = \|Ax\| = 0 \implies x = 0.$$

Conform teoremei rangului rezultă că

$$\dim \operatorname{Im} A = \dim V - \dim \operatorname{Ker} A = \dim V$$

ceea ce arată că A este surjectivă. Transformarea A^{-1} este unitară

$$\langle x, y \rangle = \langle A(A^{-1}x), A(A^{-1}y) \rangle = \langle A^{-1}x, A^{-1}y \rangle.$$

4.7.4 Deoarece transformarea identică

$$\mathbb{I}: V \rightarrow V: x \mapsto x$$

este o transformare unitară și compunerea aplicațiilor este o operație asociativă

$$(A(BC))x = A((BC)x) = A(B(Cx)) = (AB)(Cx) = ((AB)C)x, \quad \forall x \in V$$

din propoziția anterioară rezultă că pe mulțimea transformărilor unitare

$$\{A: V \rightarrow V \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V\}$$

există o structură naturală de grup (numit *grupul transformărilor unitare* ale lui V).

4.7.5 Propoziție. Fie V un spațiu Hilbert și $A: V \rightarrow V$ aplicație liniară.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) A este transformare unitară
- b) $A^*A = \mathbb{I}$
- c) transformarea A este bijectivă și $A^{-1} = A^*$.

Demonstrație. Dacă A este transformare unitară, adică

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V$$

atunci

$$\langle A^*Ax, y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V$$

relație care conduce la $A^*A = I$. Dacă $A^*A = I$ atunci $A^*AA^{-1} = A^{-1}$, adică $A^* = A^{-1}$. Dacă A este bijectivă și $A^{-1} = A^*$ atunci

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^*Ax, y \rangle = \langle A^{-1}Ax, y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

4.7.6 Propoziție. O aplicație liniară $A: V \rightarrow V$ este transformare unitară dacă și numai dacă matricea ei în raport cu o bază ortonormată este o matrice unitară.

Demonstrație. Dacă $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este bază ortonormată și $Av_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}v_j$ atunci

$$\begin{aligned} \langle Av_i, Av_j \rangle &= \langle \sum_{k=1}^n a_{ki}v_k, \sum_{m=1}^n a_{mj}v_m \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n a_{ki}\bar{a}_{mj}\langle v_k, v_m \rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki}\bar{a}_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{jk}^*a_{ki}. \end{aligned}$$

Dacă A este transformare unitară atunci

$$\sum_{k=1}^n a_{jk}^*a_{ki} = \langle Av_i, Av_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

relație echivalentă cu $A^*A = I$. Invers, dacă $A^*A = I$ atunci

$$\begin{aligned} \langle Ax, Ay \rangle &= \left\langle A\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right), A\left(\sum_{j=1}^n y_j v_j\right) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \bar{y}_j \langle Av_i, Av_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \bar{y}_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

4.7.7 Teoremă. Dacă $A: V \rightarrow V$ este transformare unitară atunci:

- a) orice valoare proprie λ este astfel încât $|\lambda| = 1$
- b) vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt ortogonali.

Demonstrație. a) Fie λ o valoare proprie a lui A și $u \neq 0$ un vector propriu corespunzător, adică $Au = \lambda u$. Din relația $\langle Au, Au \rangle = \langle u, u \rangle$ rezultă $|\lambda| = 1$.

b) Fie $\lambda_1 \neq \lambda_2$ două valori proprii distincte și u_1, u_2 vectori proprii corespunzători, adică $Au_1 = \lambda_1 u_1$ și $Au_2 = \lambda_2 u_2$. Din relația $\langle Au_1, Au_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$ rezultă $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$.

4.7.8 Teoremă. *Dacă $A: V \rightarrow V$ este o transformare unitară atunci există o bază a lui V în raport cu care matricea lui A este o matrice diagonală.*

Demonstrație. Utilizăm metoda inducției matematice. Afirmția este, evident, adevărată în cazul $\dim V = 1$. Presupunând că afirmația este adevărată în cazul spațiilor de dimensiune $n-1$ aratăm că ea este adevărată și pentru spațiile de dimensiune n . Fie V un spațiu vectorial de dimensiune n și $A: V \rightarrow V$ o transformare unitară. Fie $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ o valoare proprie și $u \neq 0$ un vector propriu corespunzător, adică $Au = \lambda_1 u$. Vectorul unitar $v_1 = \frac{u}{\|u\|}$ este și el vector propriu corespunzător valorii proprii λ_1 . Subspațiul vectorilor ortogonali pe v_1

$$W = \{v_1\}^\perp = \{x \in V \mid \langle v_1, x \rangle = 0\}$$

este un subspațiu invariant

$$x \in W \Rightarrow \langle v_1, Ax \rangle = \lambda_1 \langle \lambda_1 v_1, Ax \rangle = \lambda_1 \langle Av_1, Ax \rangle = \lambda_1 \langle v_1, x \rangle = 0 \Rightarrow Ax \in W.$$

de dimensiune $n-1$ și $\text{span}\{v_1\} \oplus W = V$. Relația $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ fiind verificată oricare ar fi $x, y \in V$ rezultă ca restricția lui A la W

$$A|_W: W \rightarrow W$$

verifică relația $\langle A|_W x, A|_W y \rangle = \langle x, y \rangle$ oricare ar fi $x, y \in W$, adică este transformare unitară. Conform ipotezei de inducție există o bază ortonormată $\{v_2, v_3, \dots, v_n\}$ a lui W în raport cu care matricea lui $A|_W$ este diagonală

$$A|_W = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Sistemul de vectori $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ este o bază ortonormată a lui V în raport cu care matricea lui A este

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

4.7.9 Există un analog real pentru noțiunea de transformare unitară, dar nu toate rezultatele din cazul complex au un analog.

4.7.10 Definiție. Fie V un spațiu Hilbert real. Prin *transformare ortogonală* a lui V se înțelege o aplicație liniară $A: V \rightarrow V$ cu proprietatea

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

4.7.11 Transformările ortogonale păstrează nemodificată norma unui vector și pe mulțimea transformărilor ortogonale

$$\{ A : V \rightarrow V \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V \}$$

există o structură naturală de grup (*grupul transformărilor ortogonale*).

4.7.12 Propoziție. O aplicație liniară $A: V \rightarrow V$ este transformare ortogonală dacă și numai dacă matricea ei în raport cu o bază ortonormată este o matrice ortogonală.

4.7.13 Teoremă. Dacă $A: V \rightarrow V$ este transformare ortogonală atunci:

- a) singurele valori proprii posibile ale lui A sunt 1 și -1 .
- b) vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt ortogonali.

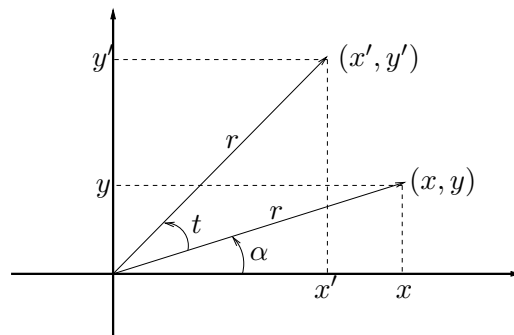


Figura 4.7: Rotația de unghi t în jurul originii.

4.7.14 Exercițiu. Identificând planul cu spațiul Hilbert real $\mathbb{R}^2$, să se arate că rotația de unghi t în jurul originii este o transformare ortogonală care, în general, nu are vectori și valori proprii.

Rezolvare. Pentru rotația $\mathcal{R}_t$ de unghi t punând

$$\mathcal{R}_t(x, y) = (x', y')$$

și notând $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ deducem (a se vedea Figura 4.7)

$$\begin{aligned} x' &= r \cos(\alpha + t) = r \cos \alpha \cos t - r \sin \alpha \sin t = x \cos t - y \sin t \\ y' &= r \sin(\alpha + t) = r \cos \alpha \sin t + r \sin \alpha \cos t = x \sin t + y \cos t \end{aligned}$$

adică

$$\mathcal{R}_t(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t).$$

Matricea rotației $\mathcal{R}_t$ în raport cu baza canonică este

$$\mathcal{R}_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Rădăcinile ecuației caracteristice

$$\begin{vmatrix} \cos t - \lambda & -\sin t \\ \sin t & \cos t - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

sunt

$$\lambda_{1,2} = \cos t \pm \sqrt{\cos^2 t - 1}$$

și ele sunt reale dacă și numai dacă $\cos t \in \{-1, 1\}$, adică dacă și numai dacă $t \in \mathbb{Z}\pi$.

4.7.15 In cazul unei transformări ortogonale $A: V \longrightarrow V$, în general, nu există o bază a lui V în raport cu care matricea lui A să fie o matrice diagonală.

4.8 Transformarea Fourier finită

4.8.1 Teoremă. Fie $d \in \{2, 3, \dots\}$. Transformarea Fourier finită

$$F: \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d: (x_0, x_1, \dots, x_{d-1}) \mapsto (y_0, y_1, \dots, y_{d-1}), \quad y_k = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{d-1} e^{\frac{2\pi i}{d} kn} x_n$$

este unitară și inversa ei este

$$F^{-1}: \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d: (y_0, y_1, \dots, y_{d-1}) \mapsto (x_0, x_1, \dots, x_{d-1}), \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} e^{-\frac{2\pi i}{d} kn} y_k.$$

Demonstrație. Matricea în raport cu baza canonică

$$F = \frac{1}{\sqrt{d}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{d}} & e^{\frac{2\pi i}{d} 2} & \dots & e^{\frac{2\pi i}{d} (d-1)} \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{d} 2} & e^{\frac{2\pi i}{d} 4} & \dots & e^{\frac{2\pi i}{d} 2(d-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{d} (d-1)} & e^{\frac{2\pi i}{d} 2(d-1)} & \dots & e^{\frac{2\pi i}{d} (d-1)^2} \end{pmatrix}$$

este o matrice unitară deoarece

$$\frac{1}{d} \sum_{n=0}^{d-1} e^{\frac{2\pi i}{d} kn} e^{-\frac{2\pi i}{d} mn} = \frac{1}{d} \sum_{n=0}^{d-1} e^{\frac{2\pi i}{d} (k-m)n} = \delta_{km} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } k=m \text{ (modulo } d) \\ 0 & \text{dacă } k \neq m \text{ (modulo } d). \end{cases}$$

4.8.2 În cazul unui spațiu Hilbert d -dimensional este convenabil uneori să indexăm coordonatele folosind inelul $\mathbb{Z}_d$ al claselor de resturi modulo d . Deoarece

$$e^{\frac{2\pi i}{d} kn} = e^{\frac{2\pi i}{d} (k+jd)n} = e^{\frac{2\pi i}{d} k(n+jd)}$$

oricare ar fi $j \in \mathbb{Z}$, au sens relațiile

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n \in \mathbb{Z}_d} e^{\frac{2\pi i}{d} kn} x_n, \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k \in \mathbb{Z}_d} e^{-\frac{2\pi i}{d} kn} y_k.$$

4.8.3 Orice spațiu Hilbert d -dimensional V poate fi identificat cu $\mathbb{C}^d$ alegând o bază ortonormată $\{|v_n\rangle\}_{n \in \mathbb{Z}_d}$. Spațiul V poate fi astfel identificat cu spațiul funcțiilor de forma $\varphi: \mathbb{Z}_d \longrightarrow \mathbb{C}$. Transformările Fourier directă și inversă se pot scrie

$$F = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k, n \in \mathbb{Z}_d} e^{\frac{2\pi i}{d} kn} |v_k\rangle \langle v_n|, \quad F^{-1} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k, n \in \mathbb{Z}_d} e^{-\frac{2\pi i}{d} kn} |v_k\rangle \langle v_n| = F^*.$$

4.8.4 Deoarece $F^4 = \mathbb{I}$ valorile proprii ale lui F aparțin mulțimii $\{1, -1, i, -i\}$.

4.8.5* Se știe (a se vedea pag. 194-17) că pentru transformarea Fourier continuă

$$\varphi \mapsto \mathcal{F}[\varphi], \quad \text{unde} \quad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(x) dx$$

funcția

$$f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_k(x) = H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

definită cu ajutorul polinomului Hermite H_k , este funcție proprie

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\xi x} H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = i^k H_k(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

4.8.6* Folosind funcția periodică

$$F_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F_k(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} H_k\left(\sqrt{\frac{2\pi}{d}}(\alpha d + x)\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{d}}(\alpha d + x)\right)^2}$$

cu perioada d definim funcția

$$\mathbb{Z}_d \longrightarrow \mathbb{R} : n \mapsto F_k(n) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} H_k\left(\sqrt{\frac{2\pi}{d}}(\alpha d + n)\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{d}}(\alpha d + n)\right)^2}$$

adică,

$$\mathbb{Z}_d \longrightarrow \mathbb{R} : n \mapsto F_k(n) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} H_k\left(\sqrt{\frac{2\pi}{d}}(\alpha d + n)\right) e^{-\frac{\pi}{d}(\alpha d + n)^2}$$

unde $\mathbb{Z}_d = \{0, 1, \dots, d-1\}$ este mulțimea întregilor modulo d .

4.8.7* Teoremă [13]. Pentru orice $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, funcția

$$\mathbb{Z}_d \longrightarrow \mathbb{R} : n \mapsto F_k(n) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} H_k\left(\sqrt{\frac{2\pi}{d}}(\alpha d + n)\right) e^{-\frac{\pi}{d}(\alpha d + n)^2}$$

este funcție proprie a transformării Fourier finite

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{d-1} e^{\frac{2\pi i}{d} j n} F_k(n) = i^k F_k(j) \quad \text{oricare ar fi } j \in \mathbb{Z}_d.$$

Demonstrație. Funcția periodică $F_k(x)$ admite dezvoltarea Fourier

$$F_k(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_{\ell} e^{\frac{2\pi i}{d} \ell x}$$

cu coeficienții

$$\begin{aligned} a_{\ell} &= \frac{1}{d} \int_0^d e^{-\frac{2\pi i}{d} \ell x} F_k(x) dx \\ &= \frac{1}{d} \int_0^d e^{-\frac{2\pi i}{d} \ell x} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{d}}(\alpha d + x)\right)^2} H_k\left(\sqrt{\frac{2\pi}{d}}(\alpha d + x)\right) dx \end{aligned}$$

Notând $t = \sqrt{\frac{2\pi}{d}} (\alpha d + x)$ și utilizând formulele $H_k(-x) = (-1)^k H_k(x)$ și

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha\sqrt{2\pi d}}^{(\alpha+1)\sqrt{2\pi d}} g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt$$

obținem

$$\begin{aligned} a_\ell &= \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha\sqrt{2\pi d}}^{(\alpha+1)\sqrt{2\pi d}} e^{-\frac{2\pi i}{d} \ell \left(t\sqrt{\frac{d}{2\pi}} - \alpha d \right)} e^{-\frac{1}{2} t^2} H_k(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha\sqrt{2\pi d}}^{(\alpha+1)\sqrt{2\pi d}} e^{-i\ell t \sqrt{\frac{2\pi}{d}}} e^{-\frac{1}{2} t^2} H_k(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\ell t \sqrt{\frac{2\pi}{d}}} e^{-\frac{1}{2} t^2} H_k(t) dt \\ &= \frac{i^k}{\sqrt{d}} e^{-\frac{\pi}{d} \ell^2} H_k \left(-\ell \sqrt{\frac{2\pi}{d}} \right) \\ &= \frac{(-i)^k}{\sqrt{d}} e^{-\frac{\pi}{d} \ell^2} H_k \left(\ell \sqrt{\frac{2\pi}{d}} \right) \end{aligned}$$

de unde

$$F_k(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell e^{\frac{2\pi i}{d} \ell x} = \frac{(-i)^k}{\sqrt{d}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{d} \ell x} e^{-\frac{\pi}{d} \ell^2} H_k \left(\ell \sqrt{\frac{2\pi}{d}} \right)$$

Din relația

$$\begin{aligned} F_k(j) &= \frac{(-i)^k}{\sqrt{d}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{d} j \ell} e^{-\frac{\pi}{d} \ell^2} H_k \left(\ell \sqrt{\frac{2\pi}{d}} \right) \\ &= (-i)^k \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{d-1} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{d} j (\alpha d + n)} e^{-\frac{\pi}{d} (\alpha d + n)^2} H_k \left(\sqrt{\frac{2\pi}{d}} (\alpha d + n) \right) \\ &= (-i)^k \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{d-1} e^{\frac{2\pi i}{d} j n} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{d} (\alpha d + n)^2} H_k \left(\sqrt{\frac{2\pi}{d}} (\alpha d + n) \right) \\ &= (-i)^k \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{d-1} e^{\frac{2\pi i}{d} j n} F_k(n) \end{aligned}$$

dedusă utilizând egalitatea

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g(\ell) = \sum_{n=0}^{d-1} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} g(\alpha d + n)$$

obținem

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{d-1} e^{\frac{2\pi i}{d} j n} F_k(n) = i^k F_k(j) \quad \text{oricare ar fi } j \in \mathbb{Z}_d.$$

4.8.8 Dintre funcțiile proprii $F_k : \mathbb{Z}_d \rightarrow \mathbb{R}$ cel mult d pot fi liniar independente.

4.8.9* Funcția lui Jacobi θ_3 definită prin relația [29, 34]

$$\theta_3(z, \tau) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau\alpha^2} e^{2\pi i\alpha z}, \quad \Im(\tau) > 0$$

este importantă pentru fizica teoretică datorită proprietăților ei, dintre care menționăm

$$\begin{aligned} \theta_3(z + m + n\tau, \tau) &= e^{-i\pi\tau n^2} e^{-2\pi i n z} \theta_3(z, \tau) \\ \theta_3(z, i\tau) &= \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp^{-\frac{\pi z^2}{\tau}} \theta_3\left(\frac{z}{i\tau}, \frac{i}{\tau}\right). \end{aligned}$$

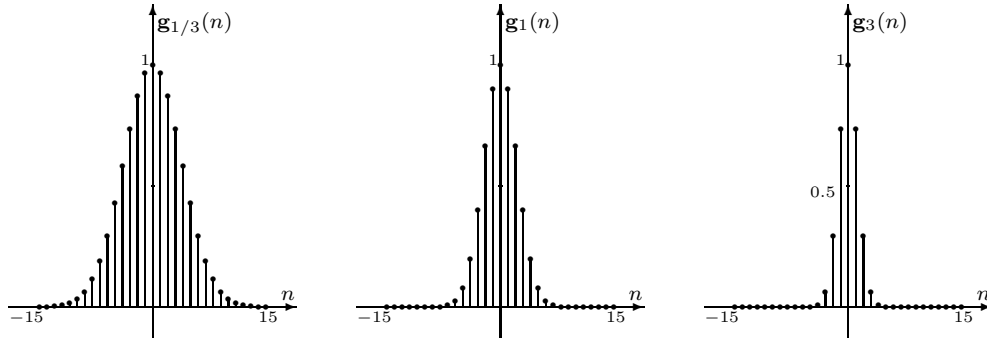


Figura 4.8: The functions $\mathbf{g}_{1/3}$, $\mathbf{g}_1$ și $\mathbf{g}_3$ în cazul $d = 31$.

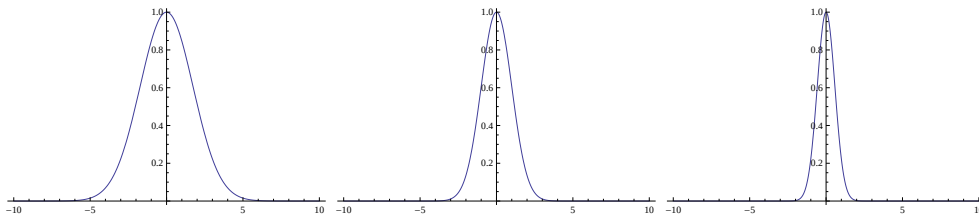


Figura 4.9: Funcțiile $e^{-\frac{1}{6}x^2}$, $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $e^{-\frac{3}{2}x^2}$.

4.8.10* Oricare ar fi $\kappa \in (0, \infty)$, se poate arăta [24, 13] că

$$\theta_3\left(\frac{k}{d}, \frac{i\kappa}{d}\right) = \frac{1}{\sqrt{\kappa d}} \sum_{n=0}^{d-1} e^{-\frac{2\pi i}{d}kn} \theta_3\left(\frac{n}{d}, \frac{i}{\kappa d}\right).$$

Din această relație rezultă că funcțiile (vezi Figura 4.8)

$$\mathbf{g}_\kappa : \mathbb{Z}_d \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{g}_\kappa(n) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\kappa\pi}{d}(\alpha d+n)^2} = \frac{1}{\sqrt{\kappa d}} \theta_3\left(\frac{n}{d}, \frac{i}{\kappa d}\right)$$

care pot fi privite ca versiuni discrete ale funcțiilor (vezi Figura 4.9)

$$g_\kappa : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_\kappa(x) = e^{-\frac{\kappa}{2}x^2} \quad \kappa \in (0, \infty)$$

verifică relația

$$F[\mathbf{g}_\kappa] = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \mathbf{g}_{\frac{1}{\kappa}}.$$

4.8.11 Dacă alegem pentru transformata Fourier a unei funcții continue definiția

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x) dx$$

atunci (a se vedea pag. 69-19)

$$\mathcal{F}[g_\kappa] = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} g_{\frac{1}{\kappa}}.$$

4.9 Operatori autoadjuncți (hermitici)

4.9.1 Definiție. O matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$$

este numită *matrice hermitică* dacă coincide cu adjuncta ei ($A^* = A$), adică dacă

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Matricea A este numită *matrice antihermitică* dacă $A^* = -A$.

4.9.2 Definiție. Fie V un spațiu Hilbert. Un operator liniar $A : V \longrightarrow V$ este numit *operator autoadjunct* sau *hermitic* dacă $A = A^*$, adică dacă

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \forall x, y \in V. \quad (4.7)$$

4.9.3 Vom nota cu $\mathcal{A}(V)$ mulțimea operatorilor autoadjuncți definiți pe V , adică

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(V) &= \{ A \in \mathcal{L}(V) \mid A^* = A \} \\ &= \{ A \in \mathcal{L}(V) \mid \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \forall x, y \in V \}.\end{aligned}$$

4.9.4 Propoziție.

$$a) \quad A, B \in \mathcal{A}(V) \implies A + B \in \mathcal{A}(V)$$

$$b) \quad \left. \begin{array}{l} A \in \mathcal{A}(V) \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \implies \alpha A \in \mathcal{A}(V)$$

$$c) \quad \text{Dacă } A, B \in \mathcal{A}(V) \text{ atunci :}$$

$$AB \in \mathcal{A}(V) \iff AB = BA$$

$$d) \quad \text{Dacă operatorul } A \in \mathcal{A}(V) \text{ este inversabil atunci } A^{-1} \in \mathcal{A}(V).$$

Demonstrație. Vom utiliza proprietățile adjunctului prezentate la pag. 135-4.

$$a) \text{ Avem } (A + B)^* = A^* + B^* = A + B$$

$$b) \text{ Avem } (\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^* = \alpha A.$$

$$c) \text{ Dacă } AB \in \mathcal{A}(V) \text{ atunci } AB = (AB)^* = B^* A^* = BA.$$

$$\text{Dacă } AB = BA \text{ atunci } (AB)^* = B^* A^* = BA = AB \text{ și deci } AB \in \mathcal{A}(V).$$

$$d) \text{ Avem } \langle A^{-1}x, y \rangle = \langle A^{-1}x, A(A^{-1}y) \rangle = \langle A(A^{-1}x), A^{-1}y \rangle = \langle x, A^{-1}y \rangle.$$

4.9.5 Spațiul operatorilor autoadjuncți $\mathcal{A}(V)$ este un spațiu vectorial real.

Considerat împreună cu produsul scalar

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB)$$

el devine un spațiu Hilbert real.

4.9.6 Propoziție. *Un operator liniar $A : V \longrightarrow V$ este operator autoadjunct dacă și numai dacă matricea lui în raport cu o bază ortonormată este o matrice hermitică.*

Demonstrație. Afirmția rezultă din rezultatul prezentat la pag. 136-5.

4.9.7 Propoziție. *Dacă $A : V \longrightarrow V$ este un operator autoadjunct atunci:*

a) toate valorile proprii sunt reale

b) vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt ortogonali.

$$W = \{v_1\}^\perp = \{x \in V \mid \langle v_1, x \rangle = 0\}$$

este un subspațiu invariant

$$x \in W \Rightarrow \langle v_1, Ax \rangle = \langle Av_1, x \rangle = \lambda_1 \langle v_1, x \rangle = 0 \Rightarrow Ax \in W$$

de dimensiune $n - 1$ și $\text{span}\{v_1\} \oplus W = V$. Relația $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ fiind verificată oricare ar fi $x, y \in V$ rezultă ca restricția lui A la W

$$A|_W : W \longrightarrow W$$

verifică relația $\langle A|_W x, y \rangle = \langle x, A|_W y \rangle$ oricare ar fi $x, y \in W$, adică este un operator autoadjunct. Conform ipotezei de inducție există o bază ortonormată $\{v_2, v_3, \dots, v_n\}$ a lui W în raport cu care matricea lui $A|_W$ este diagonală

$$A|_W = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Sistemul de vectori $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ este o bază ortonormată a lui V în raport cu care matricea lui A este

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

4.9.10 Teoremă. *Doi operatori autoadjuncți $A, B : V \longrightarrow V$ comută , adică*

$$AB = BA$$

dacă și numai dacă există în V o bază ortonormată formată din vectori proprii comuni ai lui A și B .

Demonstrație. “ $\Leftarrow$ ” Dacă $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază ortonormată formată din vectori proprii comuni ai lui A și B

$$Av_j = \alpha_j v_j \qquad Bv_j = \beta_j v_j$$

atunci pentru orice $x = \sum_{j=1}^n x_j v_j$ avem

$$(AB)x = \sum_{j=1}^n x_j ABv_j = \sum_{j=1}^n x_j \alpha_j \beta_j v_j = \sum_{j=1}^n x_j BAv_j = (BA)x.$$

“ $\Rightarrow$ ” Presupunem că $AB = BA$ și că B are doar două valori proprii β_1 și β_2 . Subspațiile proprii corespunzătoare V_1 și V_2 cu proprietatea

$$\begin{aligned} Bx &= \beta_1 x \quad \text{oricare ar fi } x \in V_1 \\ Bx &= \beta_2 x \quad \text{oricare ar fi } x \in V_2 \end{aligned}$$

sunt ortogonale și $V = V_1 \oplus V_2$. Deoarece

$$\begin{aligned} x \in V_1 &\implies B(Ax) = A(Bx) = \beta_1(Ax) \implies Ax \in V_1 \\ x \in V_2 &\implies B(Ax) = A(Bx) = \beta_2(Ax) \implies Ax \in V_2 \end{aligned}$$

putem considera restricțiile $A|_{V_1} : V_1 \rightarrow V_1$ și $A|_{V_2} : V_2 \rightarrow V_2$. Aplicațiile $A|_{V_1}$ și $A|_{V_2}$ fiind operatori autoadjuncți, în spațiile Hilbert V_1 și V_2 există bazele ortonormate $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ și $\{v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$ formate din vectori proprii ai lui A . Sistemul $\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$ este bază ortonormată în V și fiecare dintre vectorii lui este atât vector propriu al lui A cât și vector propriu al lui B . Dacă B are mai multe valori proprii, demonstrația este similară.

4.10 Produs tensorial de spații Hilbert

4.10.1 Fie V, W două spații Hilbert și $\mathfrak{B}_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\mathfrak{B}_W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ baze ortonormate în V și respectiv W . Aplicația

$$V \otimes W \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C}) : F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F_{ij} v_i \otimes w_j \mapsto \mathcal{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & \cdots & F_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1} & \cdots & F_{nm} \end{pmatrix}$$

este un izomorfism de spații vectoriale (dependent de bazele alese) care permite identificarea spațiilor $V \otimes W$ și $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$.

4.10.2 Spațiul $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ este spațiu Hilbert cu produsul scalar definit prin

$$\left\langle \begin{pmatrix} F_{11} & \cdots & F_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1} & \cdots & F_{nm} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \cdots & G_{nm} \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{F}_{ij} G_{ij}$$

adică

$$\langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle = \text{Tr}(\mathcal{F}^* \mathcal{G}).$$

4.10.3 Propoziție. *Aplicația (definită utilizând bazele $\mathfrak{B}_V$ și $\mathfrak{B}_W$)*

$$\langle, \rangle : (V \otimes W) \times (V \otimes W) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle F, G \rangle = \text{Tr}(\mathcal{F}^* \mathcal{G})$$

adică

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F_{ij} v_i \otimes w_j, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m G_{ij} v_i \otimes w_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{F}_{ij} G_{ij}$$

este un produs scalar care nu depinde de alegerea bazelor $\mathfrak{B}_V$ și $\mathfrak{B}_W$.

Demonstrație. Orice element al spațiului $V \otimes W$ este o combinație liniară de elemente de forma $x \otimes y$ cu $x \in V$ și $y \in W$. Deoarece

$$x \otimes y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle v_i, x \rangle \langle w_j, y \rangle v_i \otimes w_j$$

obținem că

$$\langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \overline{\langle v_i, x \rangle \langle w_j, y \rangle} \langle v_i, x' \rangle \langle w_j, y' \rangle = \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle$$

adică produsului scalar a două elemente de forma $x \otimes y$ nu depinde de bazele alese.

4.10.4 Teoremă. *Produsul tensorial $V \otimes W$ a două spații Hilbert este spațiu Hilbert.*

Dacă $\mathfrak{B}_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\mathfrak{B}_W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ sunt baze ortonormate în V și respectiv W atunci

$$\mathfrak{B} = \{ v_i \otimes w_j \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, m\} \}$$

este bază ortonormată în $V \otimes W$.

4.10.5 Produsul tensorial a doi operatori $S: V \longrightarrow V$ și $T: W \longrightarrow W$ este operatorul

$$T \otimes S : V \otimes W \longrightarrow V \otimes W$$

definit prin relația

$$(T \otimes S)(x \otimes y) = (Tx) \otimes (Sy)$$

pentru elemente de forma $x \otimes y$ și extins prin liniaritate la celelalte elemente.

4.10.6 Propoziție. *Dacă $A, C \in \mathcal{L}(V)$ și $B, D \in \mathcal{L}(W)$ atunci*

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD).$$

Demonstrație. Egalitatea are loc pentru orice vector de forma $x \otimes y$ din $V \otimes W$

$$(A \otimes B)(C \otimes D)x \otimes y = (A \otimes B)(Cx) \otimes (Dy) = (ACx) \otimes (BDy) = (AC) \otimes (BD)x \otimes y.$$

4.10.7 Propoziție. Notând cu

$$\begin{aligned} t_k^i &= v^i(Tv_k) && \text{elementele matricei operatorului } T \\ s_\ell^j &= w^j(Sw_\ell) && \text{elementele matricei operatorului } S \\ F^{k\ell} &= F(v^k, w^\ell) && \text{elementele matricei vectorului } F \\ ((T \otimes S)F)^{ij} &= ((T \otimes S)F)(v^i, w^j) && \text{elementele matricei vectorului } (T \otimes S)F \\ &\text{avem} \end{aligned}$$

$$((T \otimes S)F)^{ij} = t_k^i s_\ell^j F^{k\ell}.$$

Demonstrație. Deoarece formele liniare $v^i \circ T$ și $w^j \circ S$ admit dezvoltările

$$v^i \circ T = v^i(Tv_k) v^k = t_k^i v^k \quad \text{și} \quad w^j \circ S = w^j(Sw_\ell) w^\ell = s_\ell^j w^\ell$$

avem

$$((T \otimes S)F)^{ij} = ((T \otimes S)F)(v^i, w^j) = F(v^i \circ T, w^j \circ S) = t_k^i s_\ell^j F^{k\ell}. \quad (4.8)$$

4.10.8 Se obține o reprezentare alternativă avantaajoasă transformând matricile asociate elementelor lui $V \otimes W$ în vectori coloană cu nm elemente obținuți prin așezarea una sub alta a coloanelor. În cazul $n = 2$ și $m = 3$

$$\begin{pmatrix} F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{21} & F^{22} & F^{23} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} F^{11} \\ F^{21} \\ F^{12} \\ F^{22} \\ F^{13} \\ F^{23} \end{pmatrix}.$$

Corespunzător, unui operator $T \otimes S$ i se asociază matricea

$$\mathcal{T} \otimes \mathcal{S} = \begin{pmatrix} s_1^1 \mathcal{T} & \cdots & s_m^1 \mathcal{T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1^m \mathcal{T} & \cdots & s_m^m \mathcal{T} \end{pmatrix}$$

unde blocul matricial $s_i^j \mathcal{T}$ se obține înmulțind cu s_i^j matricea $\mathcal{T}$ a lui T . Se obține astfel posibilitatea de a scrie relația (4.8) folosind înmulțirea unei matrice cu un vector coloană. În cazul $n = 2$ și $m = 3$ relația (4.8) devine

$$\begin{pmatrix} ((T \otimes S)F)^{11} \\ ((T \otimes S)F)^{21} \\ ((T \otimes S)F)^{12} \\ ((T \otimes S)F)^{22} \\ ((T \otimes S)F)^{13} \\ ((T \otimes S)F)^{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1^1 t_1^1 & s_1^1 t_2^1 & s_2^1 t_1^1 & s_2^1 t_2^1 & s_3^1 t_1^1 & s_3^1 t_2^1 \\ s_1^1 t_1^2 & s_1^1 t_2^2 & s_2^1 t_1^2 & s_2^1 t_2^2 & s_3^1 t_1^2 & s_3^1 t_2^2 \\ s_1^2 t_1^1 & s_1^2 t_2^1 & s_2^2 t_1^1 & s_2^2 t_2^1 & s_3^2 t_1^1 & s_3^2 t_2^1 \\ s_1^2 t_1^2 & s_1^2 t_2^2 & s_2^2 t_1^2 & s_2^2 t_2^2 & s_3^2 t_1^2 & s_3^2 t_2^2 \\ s_1^3 t_1^1 & s_1^3 t_2^1 & s_2^3 t_1^1 & s_2^3 t_2^1 & s_3^3 t_1^1 & s_3^3 t_2^1 \\ s_1^3 t_1^2 & s_1^3 t_2^2 & s_2^3 t_1^2 & s_2^3 t_2^2 & s_3^3 t_1^2 & s_3^3 t_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{11} \\ F^{21} \\ F^{12} \\ F^{22} \\ F^{13} \\ F^{23} \end{pmatrix}.$$

Dacă T este operatorul identitate $Ix = x$ atunci

$$\mathcal{I} \otimes \mathcal{S} = \begin{pmatrix} s_1^1 & 0 & s_2^1 & 0 & s_3^1 & 0 \\ 0 & s_1^1 & 0 & s_2^1 & 0 & s_3^1 \\ s_1^2 & 0 & s_2^2 & 0 & s_3^2 & 0 \\ 0 & s_1^2 & 0 & s_2^2 & 0 & s_3^2 \\ s_1^3 & 0 & s_2^3 & 0 & s_3^3 & 0 \\ 0 & s_1^3 & 0 & s_2^3 & 0 & s_3^3 \end{pmatrix}$$

iar dacă S este operatorul identitate $Ix = x$ atunci

$$\mathcal{T} \otimes \mathcal{I} = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1^2 & t_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_1^1 & t_2^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_1^2 & t_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_1^1 & t_2^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix}.$$

4.11 Sisteme cuantice cu spațiu Hilbert finit-dimensional

4.11.1 In cazul unei particule cuantice care se poate mișca de-a lungul unei axe, pozițiile posibile ale particulei sunt descrise utilizând $\mathbb{R}$ ca model matematic iar stările cuantice posibile de funcții $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de pătrat integrabil

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty.$$

Spațiul acestor funcții, considerat împreună cu produsul scalar

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_1(x)} \psi_2(x) dx$$

este un spațiu Hilbert infinit dimensional, notat cu $L^2(\mathbb{R})$. Fiecărei funcții $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ i se asociază transformata Fourier $\mathcal{F}[\psi]: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definită prin relația

$$\mathcal{F}[\psi](p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \psi(x) dx \quad (4.9)$$

unde $\hbar$ este constanta lui Planck h împărțită cu 2π . In starea cuantică descrisă de funcția normată Ψ , numărul

$$\int_a^b |\Psi(x)|^2 dx$$

reprezintă probabilitatea de a găsi particula în intervalul $[a, b]$, iar

$$\int_a^b |\mathcal{F}[\Psi](p)|^2 dp$$

probabilitatea ca impulsul particulei sa aparțină intervalului $[a, b]$.

Mărimile fizice sunt descrise cu ajutorul operatorilor liniari. Poziția particulei este descrisă de operatorul [14]

$$\psi \mapsto \hat{x} \psi \quad \text{unde} \quad (\hat{x} \psi)(x) = x \psi(x) \quad (4.10)$$

iar impulsul de operatorul

$$\psi \mapsto \hat{p} \psi \quad \text{unde} \quad \hat{p} \psi = -i\hbar \frac{d\psi}{dx}. \quad (4.11)$$

In starea cuantică descrisă de funcția de undă normată Ψ , numerele

$$\langle \hat{x} \rangle = \langle \Psi, \hat{x} \Psi \rangle \quad \text{și} \quad \langle \hat{p} \rangle = \langle \Psi, \hat{p} \Psi \rangle$$

reprezintă valorile medii ale coordonatei și impulsului, respectiv.

4.11.2* O versiune foarte simplificată a sistemului cuantic prezentat se obține admitând că pentru particula considerată numărul de poziții care se pot distinge este finit. Este

convenabil să se admită că numărul pozițiilor ce pot fi distinse este impar, $d = 2s + 1$ și că mulțimea acestora este

$$\mathcal{S}_d = \left\{ -s\sqrt{\frac{2\pi}{d}}, (-s+1)\sqrt{\frac{2\pi}{d}}, \dots, (s-1)\sqrt{\frac{2\pi}{d}}, s\sqrt{\frac{2\pi}{d}} \right\}.$$

Deoarece

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2\pi}{d}} = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{d \rightarrow \infty} (\pm s)\sqrt{\frac{2\pi}{d}} = \pm \infty$$

putem considera că, într-un anumit sens, avem

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \mathcal{S}_d = (-\infty, \infty).$$

4.11.3 În versiunea simplificată prezentată, este convenabil ca pentru mulțimea pozițiilor posibile să se utilizeze inelul $\mathbb{Z}_d = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ al întregilor modulo d ca model matematic. Alegând $\{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$ ca o mulțime de reprezentanți ‘standard’ pentru elementele lui $\mathbb{Z}_d$, stările sistemului cuantic considerat sunt descrise de funcții

$$\psi : \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Spațiul $\mathcal{H}$ al acestor funcții considerat împreună cu produsul scalar

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \sum_{n=-s}^s \overline{\psi_1(n)} \psi_2(n)$$

este un spațiu Hilbert d -dimensional izomorf cu spațiul Hilbert standard $\mathbb{C}^d$.

4.11.4 Alegem în $\mathcal{H}$ o bază ortonormată $\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{Z}_d}$ și definim operatorul ‘poziție’

$$Q : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad Q = \sqrt{\frac{2\pi}{d}} \sum_{n=-s}^s n |n\rangle \langle n|.$$

Transformarea Fourier finită

$$F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad F = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n, n'=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d} nn'} |n\rangle \langle n'|$$

ne permite să definim o a doua bază ortonormată $\{|\tilde{k}\rangle\}_{k \in \mathbb{Z}_d}$, unde

$$|\tilde{k}\rangle = F|k\rangle = F^+|-k\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d} kn} |n\rangle$$

și să definim operatorul ‘impuls’

$$P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad P = \sqrt{\frac{2\pi}{d}} \sum_{k=-s}^s k |\tilde{k}\rangle \langle \tilde{k}|.$$

Operatorii Q și P verifică relațiile

$$FQF^+ = P \quad FPF^+ = -Q$$

și au același spectru (mulțime de valori proprii) și anume

$$\mathcal{S}_d = \left\{ -s\sqrt{\frac{2\pi}{d}}, (-s+1)\sqrt{\frac{2\pi}{d}}, \dots, (s-1)\sqrt{\frac{2\pi}{d}}, s\sqrt{\frac{2\pi}{d}} \right\}.$$

4.11.5* Fiecare stare $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ admite reprezentările

$$|\psi\rangle = \sum_{n=-s}^s \psi(n) |n\rangle = \sum_{k=-s}^s \tilde{\psi}(k) |\tilde{k}\rangle$$

unde $\psi: \mathbb{Z}_d \rightarrow \mathbb{C}: n \mapsto \psi(n)$ și $\tilde{\psi}: \mathbb{Z}_d \rightarrow \mathbb{C}: k \mapsto \tilde{\psi}(k)$ verificând relațiile

$$\psi(n) = \langle n | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d} kn} \tilde{\psi}(k), \quad \tilde{\psi}(k) = \langle \tilde{k} | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^s e^{-\frac{2\pi i}{d} kn} \psi(n)$$

sunt funcțiile de undă corespunzătoare în reprezentarea pozițiilor și a impulsurilor.

4.11.6* Operatorii de translație $A, B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

$$A = e^{-i\sqrt{2\pi/d}P} = \sum_{k=-s}^s e^{-\frac{2\pi i}{d}k} |\tilde{k}\rangle \langle \tilde{k}|, \quad B = e^{i\sqrt{2\pi/d}Q} = \sum_{\ell=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d}\ell} |\ell\rangle \langle \ell|$$

verifică relațiile

$$\begin{aligned} A|\ell\rangle &= |\ell+1\rangle, & A|\tilde{k}\rangle &= e^{-\frac{2\pi i}{d}k} |\tilde{k}\rangle, & A^d &= B^d = \mathbb{I}, \\ B|\ell\rangle &= e^{\frac{2\pi i}{d}\ell} |\ell\rangle, & B|\tilde{k}\rangle &= |\widetilde{k+1}\rangle, & A^\alpha B^\beta &= e^{-\frac{2\pi i}{d}\alpha\beta} B^\beta A^\alpha. \end{aligned}$$

Operatorii de translație generalizați [33]

$$D(\alpha, \beta) = e^{\frac{\pi i}{d}\alpha\beta} A^\alpha B^\beta \quad \text{unde } (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d$$

definesc o reprezentare proiectivă a grupului Weyl finit.

4.11.7* Vectorii $\{|\alpha, \beta\rangle\}_{\alpha, \beta=-s}^s$, unde

$$|\alpha, \beta\rangle = D(\alpha, \beta) \frac{\mathbf{g}_1}{\|\mathbf{g}_1\|} = \frac{e^{-\frac{\pi i}{d}\alpha\beta}}{\|\mathbf{g}_1\|} \sum_{j=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d}\beta j} \mathbf{g}_1(j-\alpha) |j\rangle$$

satisfac rezoluția identității

$$\frac{1}{d} \sum_{\alpha, \beta=-s}^s |\alpha, \beta\rangle \langle \alpha, \beta| = \mathbb{I}.$$

Frame-ul $\{|\alpha, \beta\rangle\}_{\alpha, \beta=-s}^s$ poate fi privit ca un *sistem finit de stări coerente* indexate utilizând mulțimea $\mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d$, direct legată de *spațiul finit al fazelor* $\mathcal{S}_d \times \mathcal{S}_d$.

4.11.8* Metodă de cuantificare bazată pe utilizarea frame-ului $\{|\alpha, \beta\rangle\}_{\alpha, \beta=-s}^s$:

Urmând analogia cu definițiile operatorilor Q și P

$$\mathbb{I} = \sum_{n=-s}^s |n\rangle \langle n| \quad \mapsto \quad Q = \sqrt{\frac{2\pi}{d}} \sum_{n=-s}^s n |n\rangle \langle n|$$

$$\mathbb{I} = \sum_{k=-s}^s |\tilde{k}\rangle\langle\tilde{k}| \quad \mapsto \quad P = \sqrt{\frac{2\pi}{d}} \sum_{k=-s}^s k |\tilde{k}\rangle\langle\tilde{k}|$$

asociem un operator A_φ

$$\mathbb{I} = \frac{1}{d} \sum_{\alpha, \beta=-s}^s |\alpha, \beta\rangle\langle\alpha, \beta| \quad \mapsto \quad A_\varphi = \frac{1}{d} \sum_{\alpha, \beta=-s}^s \varphi(\alpha, \beta) |\alpha, \beta\rangle\langle\alpha, \beta|$$

oricărei funcții

$$\varphi: \{-s, -s+1, \dots, s\} \times \{-s, -s+1, \dots, s\} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

4.11.9* Operatorul corespunzător funcției

$$\varphi: \{-s, -s+1, \dots, s\} \times \{-s, -s+1, \dots, s\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(\alpha, \beta) = \alpha$$

este

$$A_q: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad A_q = \frac{1}{d} \sum_{\alpha, \beta=-s}^s \alpha |\alpha, \beta\rangle\langle\alpha, \beta|$$

și are aceleași stări proprii ca operatorul Q

$$A_q |n\rangle = \lambda_n |n\rangle \quad \text{unde} \quad \lambda_n = \frac{1}{\|\mathbf{g}_1\|^2} \sum_{\alpha=-s}^s \alpha \mathbf{g}_1^2(\alpha + n)$$

4.11.10* Operatorul corespunzător funcției

$$\varphi: \{-s, -s+1, \dots, s\} \times \{-s, -s+1, \dots, s\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(\alpha, \beta) = \beta$$

este

$$A_p: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad A_p = \frac{1}{d} \sum_{\alpha, \beta=-s}^s \beta |\alpha, \beta\rangle\langle\alpha, \beta|$$

și are aceleași stări proprii ca operatorul P

$$A_p |\tilde{k}\rangle = \lambda_k |\tilde{k}\rangle$$

4.11.11* Operatorul corespunzător funcției

$$\varphi: \{-s, -s+1, \dots, s\} \times \{-s, -s+1, \dots, s\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$$

este

$$A_{\frac{1}{2}(p^2+q^2)}: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad A_{\frac{1}{2}(p^2+q^2)} = \frac{1}{d} \sum_{\alpha, \beta=-s}^s \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) |\alpha, \beta\rangle\langle\alpha, \beta|.$$

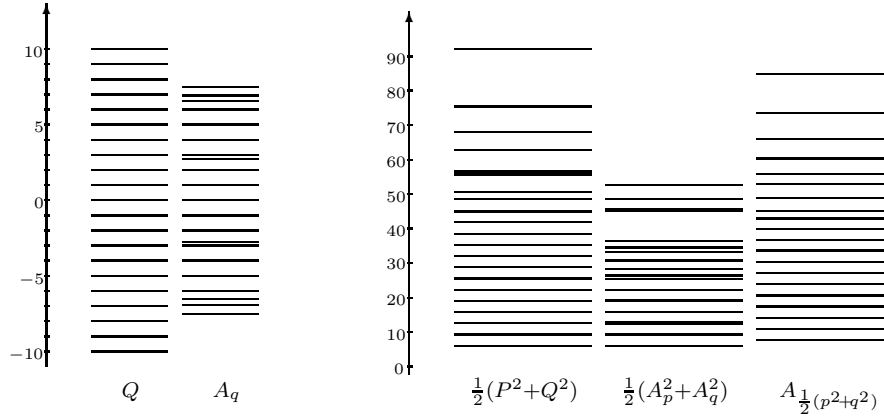


Figura 4.10: Spectrele operatorilor în cazul $d = 21$.

4.11.12* Operatorii A_q și A_p pot fi utilizați ca variante alternative pentru operatorii poziție și impuls. Operatorul $A_{\frac{1}{2}(p^2+q^2)}$ poate fi privit ca fiind hamiltonianul unui oscilator cuantic finit [8]. În cazul lui, tendința de a avea nivele echidistante este chiar mai evidentă decât în cazul hamiltonianului $\frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$.

4.11.13* În cazul $d \rightarrow \infty$, obiectele matematice prezentate mai sus corespund într-un anumit sens celor din cazul continuu. O listă extinsă referitoare la această corespondență este prezentată în tabelul de la pagina 162.

4.11.14 Valoarea medie a unei mărimi $\hat{A}$ într-o stare normată ψ se poate exprima cu ajutorul proiecteurului ortogonal corespunzător

$$\hat{P}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$$

sub forma

$$\langle\hat{A}\rangle_\psi = \text{Tr}(\hat{A}\hat{P}_\psi)$$

deoarece alegând o bază ortonormată $\{|n\rangle\}$ avem

$$\begin{aligned} \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle &= \sum_{n,k} \langle\psi|n\rangle\langle n|\hat{A}|k\rangle\langle k|\psi\rangle \\ &= \sum_{n,k} \langle n|\hat{A}|k\rangle\langle k|\psi\rangle\langle\psi|n\rangle \\ &= \sum_{n,k} \langle n|\hat{A}|k\rangle\langle k|\hat{P}_\psi|n\rangle = \text{Tr}(\hat{A}\hat{P}_\psi). \end{aligned}$$

4.11.15 Pentru a descrie starea sistemului cuantic, în locul funcției de undă normate ψ se poate utiliza operatorul proiecție ortogonală $\hat{P}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ asociat care este hermitic

$$\langle\hat{P}_\psi\varphi_1, \varphi_2\rangle = \langle\varphi_1, \psi\rangle\langle\psi, \varphi_2\rangle = \langle\varphi_1, \hat{P}_\psi\varphi_2\rangle$$

semi-pozitiv definit

$$\langle\varphi|\hat{P}_\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle\langle\psi|\varphi\rangle = |\langle\psi|\varphi\rangle|^2 \geq 0$$

și are urma egală cu 1

$$\text{Tr } \hat{P}_\psi = \sum_n \langle n|\hat{P}_\psi|n\rangle = \sum_n \langle n|\psi\rangle\langle\psi|n\rangle = \sum_n |\langle n|\psi\rangle|^2 = 1.$$

4.11.16 Definiție.

Operatorii $\hat{\rho}$ hermitici, semi-pozitiv definiți cu urma egală cu 1

$$\hat{\rho}^+ = \hat{\rho}, \quad \hat{\rho} \geq 0, \quad \text{Tr } \hat{\rho} = 1$$

se numesc *operatori densitate*.

4.11.17 Operatorii densitate descriu *stări generalizate* ale sistemului cuantic.

Operatorii densitate de forma $\hat{P}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ descriu *stări pure* iar ceilalți operatori densitate descriu *stări mixte*. Valoarea medie a observabilei $\hat{A}$ în starea descrisă de operatorul densitate $\hat{\rho}$ este

$$\langle\hat{A}\rangle = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}).$$

4.11.18 Prin **qubit** se înțelege un sistem cuantic cu spațiu Hilbert bidimensional.

În acest caz spațiul operatorilor hermitici, care este un spațiu Hilbert real cu produsul scalar

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB)$$

are dimensiune 4. Dacă $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ este bază ortonormată în spațiul Hilbert al stărilor atunci operatorii Pauli

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{I}} &= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| & \text{cu matricea} & \hat{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\hat{\sigma}_1 &= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| & \text{cu matricea} & \hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{\sigma}_2 &= i|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1| & \text{cu matricea} & \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{\sigma}_3 &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| & \text{cu matricea} & \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

formează o bază ortogonală în spațiul operatorilor hermitici.

În particular, orice operator densitate se poate reprezenta sub forma

$$\varrho = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\sigma_0 + r_1 \sigma_1 + r_2 \sigma_2 + r_3 \sigma_3)$$

cu $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$. Rezolvând ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} \frac{1+r_3}{2} - \lambda & \frac{r_1 - ir_2}{2} \\ \frac{r_1 + ir_2}{2} & \frac{1-r_3}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

se obțin pentru ϱ valorile proprii

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \|\mathbf{r}\|}{2}.$$

Deoarece

$$\varrho \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|\mathbf{r}\| \leq 1$$

în cazul unui qubit, stările posibile (pure sau mixte) se află în corespondență unu-la-unu cu punctele aparținând sferei închise de rază 1 centrate în origine

$$\Omega_2 = \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{r}\| \leq 1 \} = \{ (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3 \mid r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \leq 1 \}$$

numită *sfera lui Bloch* sau *sfera lui Poincaré*. Stări pure

$$|\psi\rangle = e^{i\alpha} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |1\rangle \right)$$

descrie de operatorul densitate

$$\varrho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & 1 - \cos \theta \end{pmatrix}$$

îi corespunde vectorul unitar

$$\mathbf{r} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \in S^2 = \partial\Omega_2.$$

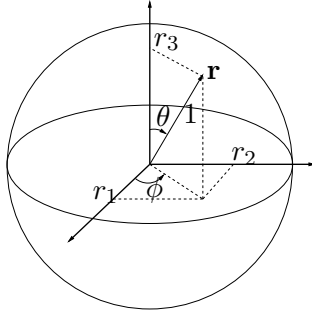


Figura 4.11: Sfera lui Bloch, numită și sfera lui Poincaré.

Stările pure corespund la puncte aparținând suprafeței sferei iar cele mixte la puncte interioare. Fiecare pereche de puncte diametral opuse ale sferei S^2 reprezintă o pereche de stări pure ortogonale. Transformările unitare corespund rotațiilor sferei.

<i>Cazul continuu</i>	<i>Cazul (2s+1) – dimensional</i>
$x \in (-\infty, \infty)$	$n\sqrt{\frac{2\pi}{d}} \in \mathcal{S}_d$
$p \in (-\infty, \infty)$	$k\sqrt{\frac{2\pi}{d}} \in \mathcal{S}_d$
$\langle x x'\rangle = \delta(x-x')$	$\langle n n'\rangle = \delta_{nn'}$
$ \psi\rangle = \int dx \psi(x) x\rangle$	$ \psi\rangle = \sum_{n=-s}^s \psi(n) n\rangle$
$\psi(x) = \langle x \psi\rangle$	$\psi(n) = \langle n \psi\rangle$
$\hat{x} = \int dx x x\rangle\langle x $	$Q = \sqrt{\frac{2\pi}{d}} \sum_{n=-s}^s n n\rangle\langle n $
$\hat{x} x\rangle = x x\rangle$	$Q n\rangle = n\sqrt{\frac{2\pi}{d}} n\rangle$
$\mathcal{F} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint dx' dx e^{ix'x} x'\rangle\langle x $	$F = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n',n=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d} n'n} n'\rangle\langle n $
$\mathcal{F} \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint dx' dx e^{ix'x} \psi(x) x'\rangle$	$F \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n',n=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d} n'n} \psi(n) n'\rangle$
$\mathcal{F} \psi\rangle = \int dx' \mathcal{F}[\psi](x') x'\rangle$	$\mathcal{F} \psi\rangle = \sum_{n'=-s}^s \mathcal{F}[\psi](n') n'\rangle$
$\mathcal{F}[\psi](x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{ix'x} \psi(x)$	$F[\psi](n') = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d} n'n} \psi(n)$
$ \tilde{p}\rangle = \mathcal{F} p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{ipx} x\rangle$	$ \tilde{k}\rangle = \mathcal{F} k\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d} kn} n\rangle$
$\langle x \tilde{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx}$	$\langle n \tilde{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} e^{\frac{2\pi i}{d} kn}$
$\langle \tilde{p} \tilde{p}'\rangle = \delta(p-p')$	$\langle \tilde{k} \tilde{k}'\rangle = \delta_{kk'}$
$ \psi\rangle = \int dp \tilde{\psi}(p) \tilde{p}\rangle$	$ \psi\rangle = \sum_{n=-s}^s \tilde{\psi}(k) \tilde{k}\rangle$
$\tilde{\psi}(p) = \langle \tilde{p} \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ipx} \psi(x)$	$\tilde{\psi}(k) = \langle \tilde{k} \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^s e^{-\frac{2\pi i}{d} kn} \psi(n)$
$\hat{p} = \int dp p \tilde{p}\rangle\langle \tilde{p} $	$P = \sqrt{\frac{2\pi}{d}} \sum_{k=-s}^s k \tilde{k}\rangle\langle \tilde{k} $
$\hat{p} \tilde{p}\rangle = p \tilde{p}\rangle$	$P \tilde{k}\rangle = k\sqrt{\frac{2\pi}{d}} \tilde{k}\rangle$
$\psi_\kappa(x) = e^{-\frac{\kappa}{2}x^2}$	$\mathbf{g}_\kappa(n) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\kappa}{2} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{d}} (\alpha d + n) \right)^2}$
$e^{-i\alpha\hat{p}} x\rangle = x+\alpha\rangle$	$A^\alpha n\rangle = n+\alpha\rangle$
$e^{-i\alpha\hat{p}} \tilde{p}\rangle = e^{-i\alpha p} \tilde{p}\rangle$	$A^\alpha \tilde{k}\rangle = e^{-\frac{2\pi i}{d} \alpha k} \tilde{k}\rangle$
$e^{i\beta\hat{x}} x\rangle = e^{i\beta x} x\rangle$	$B^\beta n\rangle = e^{\frac{2\pi i}{d} \beta n} n\rangle$
$e^{i\beta\hat{x}} \tilde{p}\rangle = \widetilde{p+\beta}\rangle$	$B^\beta \tilde{k}\rangle = \widetilde{k+\beta}\rangle$
$D(\frac{\alpha+i\beta}{\sqrt{2}}) = e^{\frac{i}{2}\alpha\beta} e^{-i\alpha\hat{p}} e^{i\beta\hat{x}}$	$D(\alpha, \beta) = e^{\frac{\pi i}{d} \alpha\beta} A^\alpha B^\beta$
$ z\rangle = D(z) \frac{\psi_1}{\ \psi_1\ }$	$ \alpha, \beta\rangle = D(\alpha, \beta) \frac{\mathbf{g}_1}{\ \mathbf{g}_1\ }$
$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} dz z\rangle\langle z = \mathbb{I}$	$\frac{1}{d} \sum_{\alpha, \beta=-s}^s \alpha, \beta\rangle\langle \alpha, \beta = \mathbb{I}$

Capitolul 5

Elemente de teoria distribuțiilor

5.1 Distribuții

5.1.1 Utilizarea modelelor matematice permite o explorare profundă a realității, dar, în general, nu se poate face fără a recurge la anumite idealizări. În modelele utilizate în fizică, un rol fundamental revine unor noțiuni cum ar fi cele de punct material și de sarcină punctiformă. Deși aceste idealizări conduc la simplificări remarcabile, folosirea lor nu este lipsită de dificultăți. O noțiune cum ar fi *densitatea de masă*, descrisă uzual cu ajutorul unei funcții, nu poate fi extinsă la cazul unui punct material fără a utiliza în locul funcției ceva mai general. Versiunea mai generală a noțiunii de funcție prezentată pe parcursul acestui capitol (numită *distribuție*) permite o descriere adecvată a distribuțiilor de masă și sarcină. În plus, ea permite extinderi ale noțiunilor de derivată și transformată Fourier utile în diverse modele.

5.1.2 Dacă masa unitate este distribuită uniform de-a lungul segmentului $[-\varepsilon, \varepsilon]$ atunci densitatea de masă poate fi descrisă cu ajutorul funcției

$$\varrho_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varrho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{dacă } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{dacă } |x| > \varepsilon \end{cases}$$

(extinsă arbitrar în $-\varepsilon$ și ε) și avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho_\varepsilon(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dx = 1.$$

Punctul material de masă 1 localizat în $x=0$ corespunde cazului limită $\varepsilon \rightarrow 0$, dar

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varrho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \infty & \text{dacă } x = 0 \\ 0 & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

nu reprezintă densitatea de masă deoarece expresia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx$$

este lipsită de sens.

5.1.3 Spunem despre o funcție $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ că este *indefinit derivabilă* și scriem $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ dacă admite derivate de orice ordin. Prin *suportul* funcției φ se înțelege închiderea mulțimii pe care ea nu se anulează, adică

$$\text{supp } \varphi = \overline{\{x \mid \varphi(x) \neq 0\}}.$$

O mulțime $K \subset \mathbb{R}$ este mulțime compactă dacă este închisă și mărginită. În particular, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ este o funcție cu *suport compact* dacă $\text{supp } \varphi$ este mărginit, adică există $r > 0$ astfel încât

$$\text{supp } \varphi \subseteq [-r, r].$$

Vom utiliza notația $\varphi_n \xrightarrow{u}_K \varphi$ pentru a indica faptul că șirul de funcții $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ converge uniform pe mulțimea compactă K la funcția φ . Avem

$$\varphi_n \xrightarrow{u}_K \varphi \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = 0.$$

5.1.4 Propoziție. Spațiul

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \text{supp } \varphi \text{ este compact}\}$$

considerat împreună cu operațiile de adunare și înmulțire cu scalari uzuale

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x), \quad (\lambda \varphi)(x) = \lambda \varphi(x)$$

este un spațiu vectorial complex (numit spațiul funcțiilor de probă [30]).

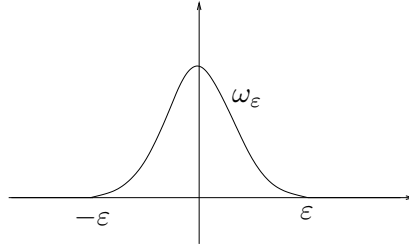
Demonstrație. Deoarece $\text{supp } (\varphi + \psi) \subseteq \text{supp } \varphi \cup \text{supp } \psi$ și $\text{supp } (\lambda \varphi) \subseteq \text{supp } \varphi$ avem

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \end{array} \right\} \implies \varphi + \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

și

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\ \lambda \in \mathbb{C} \end{array} \right\} \implies \lambda \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Verificarea axiomelor spațiului vectorial este imediată.

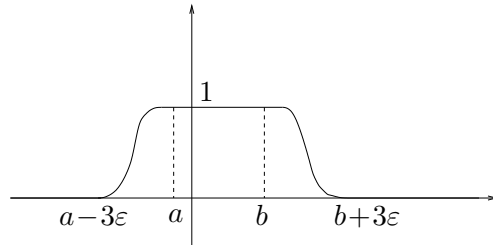
Figura 5.1: Graficul funcției ω_ε .

5.1.5 Exercițiu. Oricare ar fi $\varepsilon \in (0, \infty)$, funcția $\omega_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\varepsilon e^{\frac{\varepsilon^2}{x^2 - \varepsilon^2}} & \text{dacă } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{dacă } |x| \geq \varepsilon \end{cases} \quad \text{cu} \quad c_\varepsilon = \frac{1}{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\frac{\varepsilon^2}{x^2 - \varepsilon^2}} dx}$$

apartine spațiului $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ și

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Figura 5.2: Graficul funcției $\chi_{a,b,\varepsilon}$.

5.1.6 Exercițiu. Dacă $a < b$ și $\varepsilon > 0$ atunci funcția

$$\chi_{a,b,\varepsilon} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad \chi_{a,b,\varepsilon}(x) = \int_{a-2\varepsilon}^{b+2\varepsilon} \omega_\varepsilon(x-t) dt$$

apartine spațiului $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ și este astfel încât

$$\chi_{a,b,\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \\ 0 & \text{dacă } x \notin (a-3\varepsilon, b+3\varepsilon). \end{cases}$$

5.1.7 Dacă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ este o funcție indefinit derivabilă atunci funcția

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(x) = \chi_{a,b,\varepsilon}(x) g(x)$$

aparține spațiului $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ și este astfel încât

$$\varphi(x) = \begin{cases} g(x) & \text{dacă } x \in (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \\ 0 & \text{dacă } x \notin (a-3\varepsilon, b+3\varepsilon). \end{cases}$$

În particular, funcția $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(x) = \chi_{a,b,\varepsilon}(x) \sin x$ aparține spațiului $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ și

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dacă } x \in (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \\ 0 & \text{dacă } x \notin (a-3\varepsilon, b+3\varepsilon). \end{cases}$$

5.1.8 Definiție. Spunem că șirul $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ din $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge la $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ și scriem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi \quad \text{sau} \quad \varphi_n \longrightarrow \varphi$$

dacă există $r > 0$ astfel încât

$$\text{supp } \varphi_n \subseteq [-r, r], \quad \text{oricare ar fi } n = 0, 1, 2, \dots$$

și în plus

$$\varphi_n^{(k)} \xrightarrow{[-r,r]} \varphi^{(k)}, \quad \text{oricare ar fi } k = 0, 1, 2, \dots$$

5.1.9 Definiție. Fie V un spațiu vectorial real (complex). Funcțiile de forma

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{respectiv, } f : V \longrightarrow \mathbb{C})$$

sunt numite *funcționale*.

5.1.10 Definiție. Despre o funcțională $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ spunem că este *continuă* dacă

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi \quad \implies \quad f(\varphi_n) \longrightarrow f(\varphi).$$

5.1.11 Deoarece

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \iff \varphi_n - \varphi \rightarrow 0 \quad \text{și} \quad f(\varphi_n) \rightarrow f(\varphi) \iff f(\varphi_n - \varphi) \rightarrow 0$$

o funcțională liniară $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ este continuă dacă și numai dacă

$$\varphi_n \longrightarrow 0 \quad \implies \quad f(\varphi_n) \longrightarrow 0.$$

5.1.12 Definiție. Funcționalele liniare și continue

$$f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

sunt numite *distribuții*. În cazul unei distribuții f , în loc de $f(\varphi)$ se scrie $\langle f, \varphi \rangle$.

5.1.13 Propoziție. *Spațiul tuturor distribuțiilor*

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}) = \{ f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ este liniară și continuă} \}$$

considerat împreună cu operațiile de adunare și înmulțire cu scalari uzuale

$$\langle f+g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle, \quad \langle \lambda f, \varphi \rangle = \lambda \langle f, \varphi \rangle$$

este un spațiu vectorial complex.

5.1.14 Pentru ca aplicația $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ să fie o distribuție trebuie ca:

$$\langle f, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha\langle f, \varphi \rangle + \beta\langle f, \psi \rangle \quad \text{oricare ar fi} \quad \begin{array}{l} \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \end{array}$$

și

$$\varphi_n \longrightarrow 0 \quad \implies \quad f(\varphi_n) \longrightarrow 0.$$

5.1.15 Definiție. Spunem despre o funcție $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ că este *local integrabilă* dacă

$$\int_K |f(x)| dx < \infty, \quad \text{oricare ar fi mulțimea compactă } K \subset \mathbb{R}.$$

Utilizăm notația

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ este local integrabilă} \}.$$

5.1.16 Orice funcție continuă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este local integrabilă.

Funcția

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

nu este local integrabilă deoarece

$$\int_{-1}^1 |f(x)| dx = \infty.$$

5.1.17 Propoziție. Dacă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este local integrabilă atunci funcționala

$$T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

este distribuție.

Demonstrație. Integrala din definiția lui T_f este convergentă deoarece φ are suport compact, adică există $R > 0$ astfel încât $\text{supp } \varphi \subset [-R, R]$ și prin urmare

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = \int_{-R}^R f(x) \varphi(x) dx.$$

Aplicația T_f este liniară

$$\langle T_f, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha\langle T_f, \varphi \rangle + \beta\langle T_f, \psi \rangle.$$

Dacă $\varphi_n \rightarrow 0$ în $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ atunci există $r > 0$ astfel încât

$$\begin{aligned} \text{supp } \varphi_n &\subseteq [-r, r], & \text{oricare ar fi } n = 0, 1, 2, \dots \\ \sup_{x \in [-r, r]} |\varphi_n^{(k)}(x)| &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, & \text{oricare ar fi } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

și prin urmare

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi_n \rangle| &= \left| \int_{-r}^r f(x) \varphi_n(x) dx \right| \leq \int_{-r}^r |f(x)| |\varphi_n(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in [-r, r]} |\varphi_n(x)| \int_{-r}^r |f(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_f, \varphi_n \rangle = 0.$$

5.1.18 Definiție. Distribuțiile de forma (unde f este o funcție local integrabilă)

$$T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

sunt numite *distribuții de tip funcție* (sau *distribuții regulate*).

Distribuțiile care nu sunt de tip funcție se numesc *distribuții singulare*.

5.1.19 Utilizăm notația T_f pentru distribuția corespunzătoare funcției local integrabile f pentru a sesiza mai ușor dacă este vorba de o funcție sau de o distribuție. În mod uzual, în loc de T_f se scrie tot f , deducându-se din context dacă f este funcție sau distribuția corespunzătoare.

5.1.20 Nu vom face distincție între două funcții local integrabile care diferă doar pe o mulțime de măsură nulă. Mulțimea $L_{loc}^1(\mathbb{R})$ a funcțiilor local integrabile poate fi privită ca o submulțime a spațiului distribuțiilor $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ identificând fiecare funcție local integrabilă f cu distribuția T_f corespunzătoare.

5.1.21 Propoziție. Oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, funcționala

$$\delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

este distribuție (se numește *distribuția Dirac* cu suportul în a).

Demonstrație. Aplicația δ_a este liniară

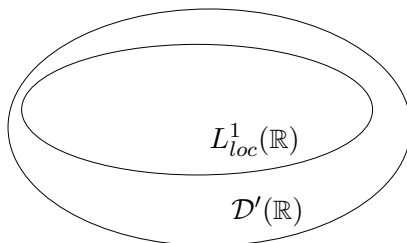


Figura 5.3: Funcțiile local integrabile sunt distribuții.

$$\langle \delta_a, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha\varphi(a) + \beta\psi(a) = \alpha\langle \delta_a, \varphi \rangle + \beta\langle \delta_a, \psi \rangle.$$

Dacă $\varphi_n \rightarrow 0$ în $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ atunci există $r > 0$ astfel încât

$$\begin{aligned} \text{supp } \varphi_n &\subseteq [-r, r], & \text{oricare ar fi } n = 0, 1, 2, \dots \\ \sup_{x \in [-r, r]} |\varphi_n^{(k)}(x)| &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, & \text{oricare ar fi } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

și prin urmare

$$|\langle \delta_a, \varphi_n \rangle| = |\varphi_n(a)| \leq \sup_{x \in [-r, r]} |\varphi_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

5.1.22 Se poate arăta că distribuția Dirac δ_a este o distribuție singulară.

În cazul în care $a = 0$ în loc de δ_0 se scrie simplu δ , adică avem

$$\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

5.1.23 Dacă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă și dacă f' este local integrabilă atunci

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx = f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = -\langle T_f, \varphi' \rangle.$$

5.1.24 Propoziție. Dacă

$$f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$$

este distribuție atunci funcționala

$$f' : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle$$

este de asemenea distribuție (numită derivata lui f).

Demonstrație. Funcționala f' este liniară

$$\langle f', \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = -\langle f, \alpha\varphi' + \beta\psi' \rangle = -\alpha\langle f, \varphi' \rangle - \beta\langle f, \psi' \rangle = \alpha\langle f', \varphi \rangle + \beta\langle f', \psi \rangle.$$

Dacă $\varphi_n \rightarrow 0$ în $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ atunci $\varphi'_n \rightarrow 0$ în $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ și prin urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f', \varphi_n \rangle = - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, \varphi'_n \rangle = 0.$$

5.1.25 Dacă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă clasic atunci derivata distribuției T_f este distribuția regulată definită de derivata clasică $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, adică

$$(T_f)' = T_{f'}.$$

Derivarea în sensul distribuțiilor prelungește operația de derivare clasică la cazuri în care ea nu este aplicabilă.

5.1.26 Orice distribuție este indefinit derivabilă.

Derivata de ordin k a unei distribuții f este distribuția

$$f^{(k)} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle f^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)} \rangle$$

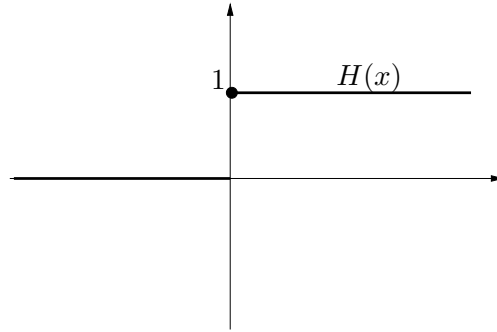


Figura 5.4: Funcția Heaviside H .

5.1.27 Exemplu. Funcția Heaviside

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ 1 & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

fiind local integrabilă definește distribuția

$$T_H : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle T_H, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$

și

$$\langle (T_H)', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = -\varphi(x)|_0^\infty = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

adică avem

$$(T_H)' = \delta.$$

5.1.28 Funcția Heaviside nu este derivabilă în 0

$$H'(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \neq 0 \\ \text{nu există} & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

dar distribuția corespunzătoare este indefinit derivabilă

$$(T_H)' = \delta, \quad (T_H)'' = \delta', \quad (T_H)''' = \delta'', \dots$$

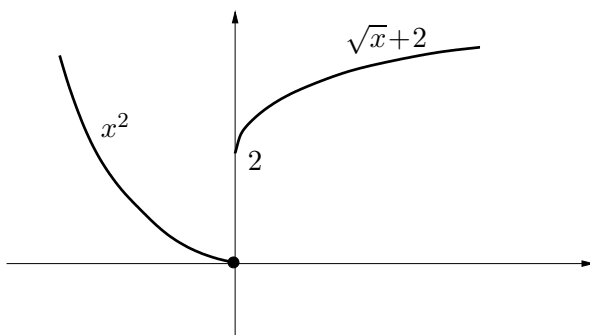


Figura 5.5: Funcția f .

5.1.29 Exercițiu. Fie funcția

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \leq 0 \\ \sqrt{x} + 2 & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Să se arate că

$$(T_f)' = T_{f'} + 2\delta$$

Rezolvare. Integrând prin părți obținem

$$\begin{aligned}
\langle (T_f)', \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^0 x^2 \varphi'(x) dx + \int_0^{\infty} (\sqrt{x} + 2) \varphi'(x) dx \\
&= -x^2 \varphi(x)|_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 2x \varphi(x) dx \\
&\quad -(\sqrt{x} + 2) \varphi(x)|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} \varphi(x) dx \\
&= 2\varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx = \langle (T_{f'}), \varphi \rangle + 2\delta, \varphi
\end{aligned}$$

unde f' este derivata clasică

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{dacă } x < 0 \\ \text{nu există} & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

prelungită arbitrar în $x = 0$.

5.1.30 Propoziție. *Dacă funcția $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este derivabilă pe $(-\infty, a) \cup (a, \infty)$ și dacă limitele laterale*

$$f(a-) = \lim_{x \nearrow a} f(x), \quad f(a+) = \lim_{x \searrow a} f(x)$$

sunt finite atunci

$$(T_f)' = T_{f'} + (f(a+) - f(a-)) \delta_a.$$

Demonstrație. Integrând prin părți obținem

$$\begin{aligned}
\langle (T_f)', \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx \\
&= -\int_{-\infty}^a f(x) \varphi'(x) dx - \int_a^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx \\
&= -f(x) \varphi(x)|_{-\infty}^a + \int_{-\infty}^a f'(x) \varphi(x) dx \\
&\quad -f(x) \varphi(x)|_a^{\infty} + \int_a^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx \\
&= (f(a+) - f(a-)) \varphi(a) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx.
\end{aligned}$$

5.1.31 Dacă $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R})$ și dacă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este local integrabilă atunci

$$\langle T_{\vartheta f}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x) f(x) \varphi(x) dx = \langle T_f, \vartheta \varphi \rangle.$$

5.1.32 Propoziție (Multiplicarea unei distribuții cu o funcție de clasă C^∞).

Dacă $\vartheta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este o funcție de clasă C^∞ și

$$f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

o distribuție atunci funcțională

$$\vartheta f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \vartheta f, \varphi \rangle = \langle f, \vartheta \varphi \rangle$$

este de asemenea distribuție.

Demonstrație. Aplicația ϑf este liniară

$$\langle \vartheta f, \alpha \varphi + \beta \psi \rangle = \alpha \langle f, \vartheta \varphi \rangle + \beta \langle f, \vartheta \psi \rangle = \alpha \langle \vartheta f, \varphi \rangle + \beta \langle \vartheta f, \psi \rangle.$$

Dacă $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ este un șir din $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ convergent la 0 atunci șirul $(\vartheta \varphi_n)_{n \geq 0}$ este un șir din $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ convergent la 0 și prin urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \vartheta f, \varphi_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, \vartheta \varphi_n \rangle = 0.$$

5.1.33 Exercițiu. Să se arate că dacă $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R})$ atunci

$$\vartheta \delta_a = \vartheta(a) \delta_a.$$

Rezolvare. Avem

$$\langle \vartheta \delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \vartheta \varphi \rangle = (\vartheta \varphi)(a) = \vartheta(a) \varphi(a) = \vartheta(a) \langle \delta_a, \varphi \rangle = \langle \vartheta(a) \delta_a, \varphi \rangle$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

5.1.34 Exercițiu. Să se arate că relațiile

$$x \delta^{(k)} = -k \delta^{(k-1)} \quad x^k \delta^{(k)} = (-1)^k k! \delta$$

au loc oricare ar fi $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Rezolvare. Utilizând formula lui Leibniz

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^k C_k^j f^{(j)} g^{(k-j)}$$

obținem

$$\begin{aligned} \langle x \delta^{(k)}, \varphi \rangle &= \langle \delta^{(k)}, x \varphi \rangle = (-1)^k \langle \delta, (x \varphi)^{(k)} \rangle = (-1)^k \langle \delta, x \varphi^{(k)} + k \varphi^{(k-1)} \rangle \\ &= (-1)^k k \varphi^{(k-1)}(0) = -k (-1)^{k-1} \langle \delta, \varphi^{(k-1)} \rangle = -k \langle \delta^{(k-1)}, \varphi \rangle = \langle -k \delta^{(k-1)}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \langle x^k \delta^{(k)}, \varphi \rangle &= \langle \delta^{(k)}, x^k \varphi \rangle = (-1)^k \langle \delta, (x^k \varphi)^{(k)} \rangle \\ &= (-1)^k \left\langle \delta, \sum_{j=0}^k C_k^j (x^k)^{(j)} \varphi^{(k-j)} \right\rangle = (-1)^k \left\langle \delta, C_k^k (x^k)^{(k)} \varphi \right\rangle = \langle (-1)^k k! \delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

5.1.35 Propoziție. Oricare ar fi $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R})$ și $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ avem

$$(\vartheta f)' = \vartheta' f + \vartheta f'$$

Demonstrație. Oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avem

$$\begin{aligned} \langle (\vartheta f)', \varphi \rangle &= -\langle \vartheta f, \varphi' \rangle = -\langle f, \vartheta \varphi' \rangle = -\langle f, (\vartheta \varphi)' - \vartheta' \varphi \rangle \\ &= \langle f', \vartheta \varphi \rangle + \langle f, \vartheta' \varphi \rangle = \langle \vartheta' f + \vartheta f', \varphi \rangle. \end{aligned}$$

5.1.36 Definiție. Spunem că șirul de distribuții $(f_n)_{n \geq 0}$ converge la distribuția f

$$\text{dacă} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \text{oricare ar fi } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

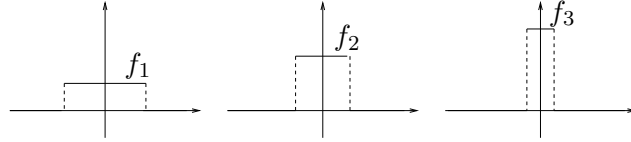


Figura 5.6: Graficele funcțiilor f_1 , f_2 , și f_3 .

5.1.37 Exercițiu. Funcției (a se vedea Figura 5.6)

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dacă } |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{dacă } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

îi corespunde distribuția regulată

$$T_{f_n} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x) dx$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Limita șirului de funcții $(f_n)_{n \geq 1}$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} \infty & \text{dacă } x = 0 \\ 0 & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

nu este o funcție local integrabilă, dar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{f_n} = \delta.$$

Rezolvare. Utilizând schimbarea de variabilă $t = nx$ obținem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \varphi\left(\frac{t}{n}\right) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(0) dt = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Relația

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \delta$$

este adevărată dacă prin f_n se înțelege distribuția T_{f_n} .

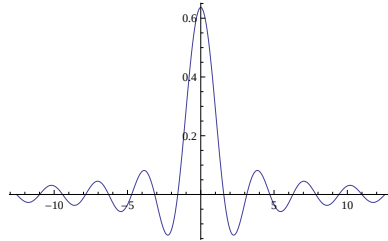


Figura 5.7: Graficul funcției f_2 .

5.1.38 Exercițiu. Funcției (a se vedea Figura 5.7)

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x}$$

îi corespunde distribuția regulată

$$T_{f_n} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x) dx$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Limita șirului de funcții $(f_n)_{n \geq 1}$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} \infty & \text{dacă } x = 0 \\ 0 & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

nu este o funcție local integrabilă, dar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{f_n} = \delta.$$

Rezolvare. Utilizând relația (1.10) și schimbarea de variabilă $t = nx$ obținem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \varphi(0) dt = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Relația

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \delta$$

este adevărată dacă prin f_n se înțelege distribuția T_{f_n} .

5.1.39 Un șir de distribuții $(f_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ este convergent dacă funcționala

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle$$

este distribuție. Seria de distribuții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este convergentă dacă

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}: \varphi \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \langle f_n, \varphi \rangle$$

este distribuție. În caz de convergență suma seriei este distribuția

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} f_n, \varphi \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \varphi \rangle.$$

5.1.40 Propoziție. Operația de derivare a distribuțiilor este liniară

$$(\alpha f + \beta g)^{(k)} = \alpha f^{(k)} + \beta g^{(k)}$$

și continuă

$$f_n \longrightarrow f \implies f_n^{(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^{(k)}.$$

Orice serie convergentă poate fi derivată termen cu termen

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f \implies \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)} = f^{(k)}.$$

Demonstrație. Dacă $f_n \longrightarrow f$ atunci

$$\langle f_n^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f_n, \varphi^{(k)} \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)} \rangle = \langle f^{(k)}, \varphi \rangle.$$

5.1.41 Propoziție. Dacă șirul de funcții local integrabile $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniform pe fiecare mulțime compactă la funcția f atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{f_n} = T_f$$

și prin urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T_{f_n})^{(k)} = (T_f)^{(k)} \quad \text{oricare ar fi } k = 0, 1, 2, \dots$$

Demonstrație. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ există $r > 0$ astfel încât $\text{supp } \varphi \subset [-r, r]$.

Deoarece φ este funcție mărginită avem $f_n \varphi \xrightarrow{u}_{[-r, r]} f \varphi$ și prin urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f_n(x) \varphi(x) dx = \int_{-r}^r f(x) \varphi(x) dx = \langle T_f, \varphi \rangle.$$

5.1.42* Exercițiu. Seriile de distribuții

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{inx} \quad \text{și} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}$$

sunt convergente.

Rezolvare. Deoarece $\left| \frac{1}{n^2} e^{inx} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, seria de funcții local integrabile

$$\frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{inx}$$

converge uniform la o funcție f pe $\mathbb{R}$ (și prin urmare, pe orice mulțime compactă).

Conform propoziției anterioare, în spațiul distribuțiilor $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ are loc relația

$$\frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{inx} = f$$

care derivată termen cu termen de două ori conduce la

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{inx} = f''.$$

5.1.43* Exercițiu. Dacă $a \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ atunci seriile

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_{na} \quad \text{și} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{na}$$

sunt convergente.

Rezolvare. Aplicația

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \mapsto \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{na}, \varphi \right\rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{n=0}^k \delta_{na}, \varphi \right\rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \varphi(na)$$

este bine-definită și liniară. Dacă $\varphi_m \rightarrow 0$ în $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ atunci există $r > 0$ astfel încât

$$\begin{aligned} \text{supp } \varphi_m &\subseteq [-r, r], & \text{oricare ar fi } m = 0, 1, 2, \dots \\ \sup_{x \in [-r, r]} |\varphi_m^{(k)}(x)| &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, & \text{oricare ar fi } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Dacă $n_r \in \mathbb{N}$ este astfel încât $n_r a \leq r < (n_r + 1)a$ atunci

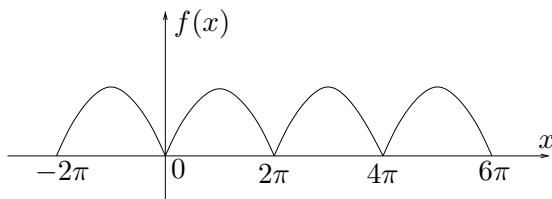
$$\left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{na}, \varphi_m \right\rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{n=0}^k \delta_{na}, \varphi_m \right\rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \varphi_m(na) = \sum_{n=0}^{n_r} \varphi_m(na)$$

și

$$\left| \sum_{n=0}^{n_r} \varphi_m(na) \right| \leq \sum_{n=0}^{n_r} |\varphi_m(na)| \leq (1 + n_r) \sup_{x \in [-r, r]} |\varphi_m(x)| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Convergența celei de a doua serii rezultă din relația

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{na} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{na} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n(-a)}.$$

Figura 5.8: Graficul funcției f .

5.1.44* Teoremă. *In spațiul distribuțiilor $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ are loc egalitatea*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2n\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}.$$

Demonstrație. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția periodică cu perioada 2π definită prin relația

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi} \quad \text{pentru } 0 \leq x < 2\pi.$$

Funcția local integrabilă f definește o distribuție cu derivata de ordinul al doilea

$$f'' = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2n\pi}.$$

Seria Fourier corespunzătoare lui f converge uniform la f pe $\mathbb{R}$

$$\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} e^{inx} = f(x).$$

Conform propoziției anterioare, în spațiul distribuțiilor are loc relația

$$\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} e^{inx} = f$$

care derivată termen cu termen de două ori conduce la egalitatea

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{inx} = f''.$$

5.1.45 Funcția

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

nu este local integrabilă și relația

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

nu definește o distribuție. Se poate însă arăta că funcționala

$$\mathcal{P} \frac{1}{x} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \left\langle \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right)$$

este distribuție (numită *valoarea principală* a lui $\frac{1}{x}$.)

5.1.46 Exercițiu. Să se arate că

$$x \cdot \mathcal{P} \frac{1}{x} = 1.$$

Rezolvare. Avem

$$\begin{aligned} \left\langle x \cdot \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle &= \left\langle \mathcal{P} \frac{1}{x}, x \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{x \varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x \varphi(x)}{x} dx \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle \end{aligned}$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

5.1.47 Exercițiu. Fie funcția

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln |x|.$$

Să se arate că aplicația

$$\tilde{f} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln |x| \varphi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \ln |x| \varphi(x) dx \right)$$

este distribuție și

$$(\tilde{f})' = \mathcal{P} \frac{1}{x}.$$

Rezolvare. Utilizând integrarea prin părți obținem

$$\begin{aligned} \langle (\tilde{f})', \varphi \rangle &= -\langle \tilde{f}, \varphi' \rangle = -\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x) \varphi'(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \ln x \varphi'(x) dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = \langle \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

5.1.48 Pentru a distinge variabila de alți parametri care apar în expresie, vom scrie uneori $\langle f(x), \varphi(x) \rangle$ în loc de $\langle f, \varphi \rangle$, fără ca $f(x)$ să însemne valoarea lui f în punctul x sau $\varphi(x)$ să însemne valoarea lui φ în punctul x .

5.1.49 Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ sunt două constante fixate, $a \neq 0$ și dacă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este o funcție local integrabilă atunci distribuția definită de funcția

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(x) = f(ax+b)$$

este

$$\langle T_g, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax+b) \varphi(x) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx$$

adică

$$\left\langle T_{f(ax+b)}, \varphi(x) \right\rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle T_{f(x)}, \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\rangle.$$

5.1.50 Propoziție (Schimbarea de variabilă). Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ sunt două constante fixate, $a \neq 0$ și dacă $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ este distribuție atunci funcționala

$$f(ax+b) : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle f(ax+b), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\rangle$$

este de asemenea distribuție.

5.1.51 Cazuri particulare importante:

$$\text{Translatia :} \quad \langle f(x+b), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(x-b) \rangle$$

$$\text{Omotetia :} \quad \langle f(ax), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle.$$

5.1.52 Exercițiu. Să se arate că

$$\delta(x-b) = \delta_b \quad \text{și} \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta.$$

5.1.53 Definiție. Spunem despre o distribuție $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ că este nulă pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}$ dacă

$$\langle f, \varphi \rangle = 0 \quad \text{oricare ar fi } \varphi \text{ cu } \text{supp } \varphi \subset D.$$

Complementara celei mai mari mulțimi deschise pe care f este nulă se numește *suportul* lui f și se notează cu $\text{supp } f$.

Spunem că f este distribuție cu suport compact dacă $\text{supp } f$ este mulțime mărginită.

5.1.54 Distribuția δ_a este cu suport compact (*punctual*) deoarece $\text{supp } \delta_a = \{a\}$.

5.1.55 Noțiunile și rezultatele prezentate se pot extinde la cazul bidimensional:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^2) = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \mid \text{supp } \varphi \text{ este compact} \}$$

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) = \{ f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ este liniară și continuă} \}$$

$$T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \varphi(x, y) dx dy$$

$$\delta_{(a,b)} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \delta_{(a,b)}, \varphi \rangle = \varphi(a, b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \varphi \right\rangle = - \left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \varphi \right\rangle = \left\langle f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right\rangle, \quad \text{etc.}$$

5.1.56 Propoziție. Dacă $f, g: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ sunt două distribuții atunci funcționala

$$f \times g: \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle f \times g, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle$$

este o distribuție, numită produsul direct al distribuțiilor f și g .

5.1.57 Din relația

$$\langle \delta_a \times \delta_b, \varphi \rangle = \langle \delta_a(x), \langle \delta_b(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle \delta_a(x), \varphi(x, b) \rangle = \varphi(a, b)$$

rezultă că

$$\delta_a \times \delta_b = \delta_{(a,b)}.$$

5.1.58 Definiție. Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ două funcții astfel încât integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt$$

este convergentă oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Funcția

$$f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt$$

se numește *convoluția* funcțiilor f și g .

5.1.59 Din relația

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) g(u) du = (g * f)(x)$$

rezultă că

$$f * g = g * f.$$

5.1.60 Definiție. Spunem că șirul $(\eta_n)_{n \geq 0}$ din $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ converge la 1 în $\mathbb{R}^2$ dacă:

a) oricare ar fi $r > 0$ există $n_r \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $n \geq n_r$ avem

$$\eta_n(x, y) = 1 \quad \text{dacă} \quad x^2 + y^2 \leq r^2$$

b) oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$ există $C_k \in (0, \infty)$ astfel încât

$$|\eta_n^{(k)}(x, y)| \leq C_k, \quad \text{oricare ar fi} \quad \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{matrix}$$

5.1.61 Propoziție. Dacă distribuțiile $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sunt astfel încât limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(x) \times g(y), \eta_n(x, y) \varphi(x+y) \rangle$$

există pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ și nu depinde de șirul $(\eta_n)_{n \geq 0}$ convergent la 1 în $\mathbb{R}^2$ ales atunci funcționala

$f * g : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle f * g, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(x) \times g(y), \eta_n(x, y) \varphi(x + y) \rangle$
 este o distribuție, numită convoluția distribuțiilor f și g .

5.1.62 Propoziție. Oricare ar fi distribuția f avem

$$f * \delta_b = \delta_b * f = f(x - b)$$

și în particular,

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

Demonstrație. Dacă $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ și dacă $(\eta_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ converge la 1 în $\mathbb{R}^2$ atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(x, b) \varphi(x + b) = \varphi(x + b)$$

și prin urmare

$$\begin{aligned} \langle f * \delta_b, \varphi \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(x) \times \delta_b(y), \eta_n(x, y) \varphi(x + y) \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(x), \eta_n(x, b) \varphi(x + b) \rangle \\ &= \langle f(x), \varphi(x + b) \rangle = \langle f(x - b), \varphi(x) \rangle. \end{aligned}$$

5.2 Distribuții temperate

5.2.1 Am definit distribuțiile ca fiind funcționale $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ liniare și continue. Rezultate, într-o oarecare măsură, similare se pot obține alegând în locul subspațiului $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R})$ un alt subspațiu. Se obțin astfel alte tipuri de distribuții. O alegere remarcabilă care permite extinderea transformării Fourier, foarte utilă în aplicații, va fi prezentată pe parcursul acestei secțiuni.

5.2.2 Propoziție. Spațiul $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ al funcțiilor indefinit derivabile

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu proprietatea că oricare ar fi $k, m \in \mathbb{N}$ există o constantă $c_{k,m}$ astfel încât

$$|x^k \varphi^{(m)}(x)| \leq c_{k,m} \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}$$

considerat împreună cu operațiile de adunare și înmulțire cu scalari uzuale

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x), \quad (\lambda \varphi)(x) = \lambda \varphi(x)$$

este un spațiu vectorial complex (numit spațiul funcțiilor rapid descrescătoare).

Demonstrație. Deoarece

$$|x^k(\varphi + \psi)^{(m)}(x)| \leq |x^k \varphi^{(m)}(x)| + |x^k \psi^{(m)}(x)|$$

$$|x^k(\lambda \varphi)^{(m)}(x)| = |\lambda| |x^k \varphi^{(m)}(x)|$$

operațiile adunare și înmulțire cu scalari sunt bine definite, adică

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \end{array} \right\} \implies \varphi + \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

și

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ \lambda \in \mathbb{C} \end{array} \right\} \implies \lambda \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Verificarea axiomelor spațiului vectorial este imediată.

5.2.3 Din definiția lui $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ rezultă că

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R}).$$

5.2.4 Exercițiu. Oricare ar fi $a \in (0, \infty)$ funcția

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(x) = e^{-ax^2}$$

aparține spațiului $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

5.2.5 Definiție. Spunem că șirul $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge la funcția constantă 0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0$$

dacă

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k \varphi_n^{(m)}(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

oricare ar fi $k, m \in \mathbb{N}$.

5.2.6 Definiție. Spunem că o funcție liniară

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

este continuă dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(\varphi_n) = 0.$$

5.2.7 Definiție. Prin distribuție temperată se înțelege o aplicație

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

care este liniară și continuă. În loc de $f(\varphi)$ scriem $\langle f, \varphi \rangle$.

5.2.8 Propoziție. *Spațiul distribuțiilor temperate*

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) = \{ f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ este liniară și continuă } \}$$

considerat împreună cu operațiile de adunare și înmulțire cu scalari

$$\langle f + g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle, \quad \langle \lambda f, \varphi \rangle = \lambda \langle f, \varphi \rangle$$

este un spațiu vectorial.

5.2.9 Definiție. Spunem că funcția

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este cu creștere lentă dacă există $k \in \mathbb{N}$ și $M \in (0, \infty)$ astfel încât

$$\frac{|f(x)|}{(1+x^2)^k} \leq M \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

5.2.10 Exempu. Orice funcție polinomială este o funcție cu creștere lentă. Funcțiile

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin x \quad \text{și} \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos x$$

fiind mărginite, sunt funcții cu creștere lentă. Funcția exponențială

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^x$$

nu este o funcție cu creștere lentă.

5.2.11 Propoziție. *Dacă funcția local integrabilă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este cu creștere lentă atunci aplicația*

$$T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

este distribuție temperată.

Demonstrație. Aplicația T_f este liniară

$$\langle T_f, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha\langle T_f, \varphi \rangle + \beta\langle T_f, \psi \rangle.$$

Funcția f fiind cu creștere lentă, există $k \in \mathbb{N}$ și $M \in (0, \infty)$ astfel încât

$$\frac{|f(x)|}{(1+x^2)^k} \leq M \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Dacă $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ este un șir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 atunci

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m \varphi_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$ și prin urmare

$$\begin{aligned}
|\langle T_f, \varphi_n \rangle| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_n(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |\varphi_n(x)| dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|}{(1+x^2)^k} |(1+x^2)^k \varphi_n(x)| dx \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |(1+x^2)^k \varphi_n(x)| dx \\
&= M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|(1+x^2)^{k+1} \varphi_n(x)|}{1+x^2} dx \leq M \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x^{2m} \varphi_n(x)|}{1+x^2} dx \\
&\leq M \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^{2m} \varphi_n(x)| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&\leq \pi M \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^{2m} \varphi_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_f, \varphi_n \rangle = 0.$$

5.2.12 Definiție. Distribuțiile temperate definite de funcții local integrabile cu creștere lentă sunt numite *distribuții temperate regulate* sau de tip funcție. Celelalte distribuții sunt numite *distribuții temperate singulare*.

5.2.13 Propoziție. (Distribuția Dirac). *Aplicația*

$$\delta_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

este o distribuție temperată, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

Demonstrație. Aplicația δ_a este liniară

$$\langle \delta_a, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha\varphi(a) + \beta\psi(a) = \alpha\langle \delta_a, \varphi \rangle + \beta\langle \delta_a, \psi \rangle.$$

Dacă $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ este un șir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 atunci

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

și prin urmare

$$|\langle \delta_a, \varphi_n \rangle| = |\varphi_n(a)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

5.2.14 Se poate arăta că distribuția Dirac δ_a este o distribuție singulară.

În cazul în care $a = 0$ în loc de δ_0 se scrie simplu δ , adică avem

$$\delta : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

5.2.15 Propoziție. (Derivarea distribuțiilor temperate). *Dacă*

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o distribuție temperată atunci aplicația

$$f' : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle$$

este de asemenea o distribuție temperată, numită derivata lui f .

Demonstrație. Aplicația f' este liniară

$$\langle f', \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = -\langle f, \alpha\varphi' + \beta\psi' \rangle = -\alpha\langle f, \varphi' \rangle - \beta\langle f, \psi' \rangle = \alpha\langle f', \varphi \rangle + \beta\langle f', \psi \rangle.$$

Dacă $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ este un șir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 atunci șirul $(\varphi'_n)_{n \geq 0}$ este un șir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 și prin urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f', \varphi_n \rangle = - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, \varphi'_n \rangle = 0.$$

5.2.16 Orice distribuție temperată este indefinit derivabilă.

Derivata de ordin k a unei distribuții f este distribuția

$$f^{(k)} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle f^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)} \rangle$$

5.2.17 Exemplu. Funcția Heaviside

$$H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ 1 & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

fiind local integrabilă și cu creștere lentă definește distribuția temperată

$$T_H : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle T_H, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$

și

$$\langle (T_H)', \varphi \rangle = -\langle T_H, \varphi' \rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(x)|_0^{\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

adică avem

$$(T_H)' = \delta.$$

5.2.18 Funcția Heaviside nu este derivabilă în 0

$$H'(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \neq 0 \\ \text{nu există} & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

dar distribuția corespunzătoare este indefinit derivabilă

$$(T_H)' = \delta, \quad (T_H)'' = \delta', \quad (T_H)''' = \delta'', \dots$$

5.2.19 Propoziție. Operația de derivare a distribuțiilor temperate este liniară

$$(\alpha f + \beta g)^{(k)} = \alpha f^{(k)} + \beta g^{(k)}$$

și continuă

$$f_n \longrightarrow f \implies f_n^{(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^{(k)}.$$

Orice serie convergentă poate fi derivată termen cu termen

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f \implies \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)} = f^{(k)}.$$

Demonstrație. Este similară celei prezentate la pag. 176-40.

5.2.20 Propoziție. (Multiplicarea unei distribuții cu x^k) Dacă $k \in \mathbb{N}$ și

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o distribuție temperată atunci aplicația

$$x^k f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle x^k f, \varphi \rangle = \langle f, x^k \varphi \rangle$$

este de asemenea o distribuție temperată.

Demonstrație. Aplicația $x^k f$ este liniară

$$\langle x^k f, \alpha \varphi + \beta \psi \rangle = \alpha \langle f, x^k \varphi \rangle + \beta \langle f, x^k \psi \rangle = \alpha \langle x^k f, \varphi \rangle + \beta \langle x^k f, \psi \rangle.$$

Dacă $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ este un șir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 atunci șirul $(x^k \varphi_n)_{n \geq 0}$ este un șir din $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent la 0 și prin urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x^k f, \varphi_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, x^k \varphi_n \rangle = 0.$$

5.2.21 Se poate arăta că aplicația

$$\vartheta f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \vartheta f, \varphi \rangle = \langle f, \vartheta \varphi \rangle$$

este o distribuție dacă f este distribuție și dacă ϑ aparține mulțimii $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ a funcțiilor indefinit derivabile

$$\vartheta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu proprietatea că oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$ există $m \in \mathbb{N}$ și $C \in (0, \infty)$ încât

$$|\vartheta^{(k)}(x)| \leq C(1 + |x|)^m, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

5.2.22 Exercițiu. Să se arate că dacă $\vartheta \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ atunci

$$\vartheta \delta_a = \vartheta(a) \delta_a.$$

5.2.23 Exercițiu. Să se arate că relațiile

$$x\delta^{(k)} = -k\delta^{(k-1)} \quad x^k\delta^{(k)} = (-1)^k k! \delta$$

au loc oricare ar fi $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

5.2.24 Exercițiu. Oricare ar fi $\vartheta \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ și $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ avem

$$(\vartheta f)' = \vartheta' f + \vartheta f'$$

Rezolvare. A se vedea pag. 174-35.

5.2.25 Funcția

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

nu este local integrabilă și relația

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

nu definește o distribuție temperată. Se poate însă arăta că funcționala

$$\mathcal{P}\frac{1}{x} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right)$$

este o distribuție temperată (numită *valoarea principală* a lui $\frac{1}{x}$.)

5.2.26 Exercițiu. Să se arate că

$$x \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = 1.$$

5.3 Transformarea Fourier a funcțiilor

5.3.1 Folosind teorema reziduurilor, am arătat că (a se vedea pag. 69-19)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \quad \text{oricare ar fi } a \in (0, \infty)$$

5.3.2 Teoremă. Fie $\kappa \in (0, \infty)$ o constantă fixată.

Dacă $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este astfel încât integralele sunt convergente atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa\xi x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa\xi u} \varphi(u) du \right) d\xi = \frac{2\pi}{\kappa} \varphi(x)$$

și

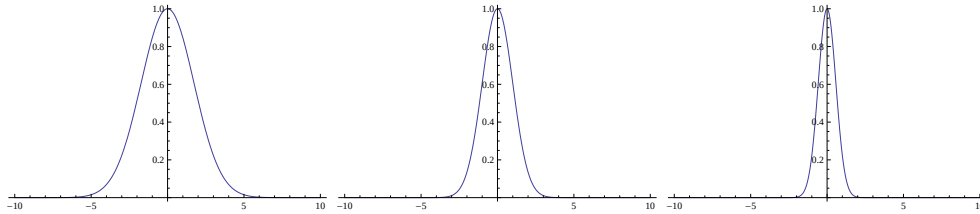


Figura 5.9: Funcțiile $e^{-\frac{1}{6}x^2}$, $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $e^{-\frac{3}{2}x^2}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa\xi u} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa u x} \varphi(x) dx \right) du = \frac{2\pi}{\kappa} \varphi(\xi).$$

Demonstrație. Oricare ar fi $a \in (0, \infty)$ avem

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2 - i\kappa\xi x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa\xi u} \varphi(u) du \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa\xi(u-x)} e^{-a\xi^2} d\xi \right] du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-\frac{\kappa^2(u-x)^2}{4a}} du. \end{aligned}$$

Utilizând în ultima integrală schimbarea de variabilă $u = x + 2\frac{\sqrt{a}}{\kappa}t$ obținem relația

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2 - i\kappa\xi x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa\xi u} \varphi(u) du \right) d\xi = \frac{2\sqrt{\pi}}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x + 2\frac{\sqrt{a}}{\kappa}t\right) e^{-t^2} dt$$

care pentru $a \searrow 0$ devine

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa\xi x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa\xi u} \varphi(u) du \right) d\xi = \frac{2\sqrt{\pi}}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-t^2} dt.$$

Dar

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-t^2} dt = \frac{2\sqrt{\pi}}{\kappa} \varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2\pi}{\kappa} \varphi(x).$$

A doua relație din enunțul teoremei se poate demonstra similar.

5.3.3 Definițiile transformărilor Fourier directă și inversă se bazează pe teorema precedentă. Există mai multe posibilități de a defini aceste transformări, trecerea de la o variantă la alta făcându-se foarte ușor.

5.3.4 În cazul $\kappa = 1$, relațiile din teoremă se pot scrie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi u} \varphi(u) du \right) d\xi &= \varphi(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi u} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \varphi(x) dx \right) du &= \varphi(\xi) \end{aligned}$$

și sugerează pentru transformările Fourier directă și inversă alegerile

$$\begin{aligned}\varphi &\mapsto \mathcal{F}[\varphi], & \mathcal{F}[\varphi](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(x) dx \\ \psi &\mapsto \mathcal{F}^{-1}[\psi], & \mathcal{F}^{-1}[\psi](x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \psi(\xi) d\xi.\end{aligned}$$

Ea este alegerea preferată în unele cărți de ecuațiile fizicii matematice [30] și va fi utilizată pe parcursul acestui capitol, exceptând ultima secțiune dedicată aplicațiilor în mecanica cuantică.

5.3.5 În cazul $\kappa = 1/\hbar$, relațiile din teoremă scrise sub forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x/\hbar} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi u/\hbar} \varphi(u) du \right) d\xi &= \varphi(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi u/\hbar} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux/\hbar} \varphi(x) dx \right) du &= \varphi(\xi)\end{aligned}$$

sugerează alegerea

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\varphi](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x/\hbar} \varphi(x) dx \\ \mathcal{F}^{-1}[\psi](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x/\hbar} \psi(\xi) d\xi.\end{aligned}$$

Este alegerea preferată în multe cărți și articole de mecanică cuantică și va fi utilizată în ultima secțiune a prezentului capitol. Într-un sistem de unități de măsură în care $\hbar = 1$ relațiile anterioare devin

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\varphi](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \varphi(x) dx \\ \mathcal{F}^{-1}[\psi](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \psi(\xi) d\xi.\end{aligned}$$

5.3.6 În cazul $\kappa = 2\pi$, relațiile din teoremă scrise sub forma

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi u} \varphi(u) du \right) d\xi &= \varphi(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi u} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i u x} \varphi(x) dx \right) du &= \varphi(\xi)\end{aligned}$$

sugerează alegerea

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\varphi](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi x} \varphi(x) dx \\ \mathcal{F}^{-1}[\psi](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi x} \psi(\xi) d\xi.\end{aligned}$$

Este alegerea preferată în unele cărți și articole referitoare la fizica cristalelor.

5.3.7 Relația (a se vedea pag. 69-19)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \quad \text{oricare ar fi } a \in (0, \infty)$$

se poate scrie sub forma

$$\mathcal{F}\left[e^{-ax^2}\right](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \quad \text{oricare ar fi } a \in (0, \infty).$$

În particular, alegând $a = \frac{1}{2}$ obținem

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right](\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

5.3.8 MATHEMATICA: Definiția utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(t) dt$

$$\text{In}[1] := \text{FourierTransform}[\text{Exp}[-t^2], t, x] \mapsto \text{Out}[1] = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{2}}$$

5.3.9 Exercițiu. Fie $a \in (0, \infty)$ și

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } |x| \leq a \\ 0 & \text{dacă } |x| > a. \end{cases}$$

Să se arate că

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \frac{2}{\xi} \sin a\xi.$$

Rezolvare. Pentru $\xi \neq 0$ avem

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(x) dx = \int_{-a}^a e^{i\xi x} dx = \frac{1}{i\xi} e^{i\xi x} \Big|_{-a}^a = \frac{e^{i\xi a} - e^{-i\xi a}}{i\xi} = \frac{2}{\xi} \sin a\xi.$$

5.3.10 Exercițiu. Să se arate că

$$\mathcal{F}[e^{-a|x|}](\xi) = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}$$

oricare ar fi $a \in (0, \infty)$.

Rezolvare. Considerând integrala în sensul valorii principale avem

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{-a|x|}](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-a|x|} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} (\cos \xi x + i \sin \xi x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} \cos \xi x dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \xi x dx. \end{aligned}$$

Integrând de două ori prin părți obținem relația

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \xi x dx &= \frac{1}{\xi} e^{-ax} \sin \xi x \Big|_0^{\infty} + \frac{a}{\xi} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin \xi x dx \\ &= -\frac{a}{\xi^2} e^{-ax} \cos \xi x \Big|_0^{\infty} - \frac{a^2}{\xi^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \xi x dx = \frac{a}{\xi^2} - \frac{a^2}{\xi^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \xi x dx \end{aligned}$$

adică

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \xi x dx = \frac{a}{\xi^2} - \frac{a^2}{\xi^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \xi x dx$$

din care deducem

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos \xi x \, dx = \frac{a}{a^2 + \xi^2}.$$

5.3.11 MATHEMATICA: Definiția utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{itx} \varphi(t) dt$
 $\text{In}[1] := \text{FourierTransform}[1/(1 + t^2), t, x] \mapsto \text{Out}[1] = e^{-\text{Abs}[x]} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
 $\text{In}[1] := \text{FourierTransform}[\text{Exp}[-\text{Abs}[t]], t, x] \mapsto \text{Out}[1] = \frac{\sqrt{2}}{1+x^2}$

5.3.12 Teoremă. Dacă $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ atunci transformata Fourier a lui φ

$$\mathcal{F}[\varphi] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\xi x} \varphi(x) \, dx$$

aparține de asemenea spațiului $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ și au loc relațiile

$$(\mathcal{F}[\varphi])^{(k)} = \mathcal{F}[(ix)^k \varphi] \quad \mathcal{F}[\varphi^{(k)}] = (-i\xi)^k \mathcal{F}[\varphi].$$

Demonstrație. Aplicația $\mathcal{F}[\varphi]$ se definește cu ajutorul unei integrale improprie cu parametru. Din definiția spațiului $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ rezultă că există $M \in (0, \infty)$ astfel încât

$$|x^2 \varphi(x)| \leq M \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Din această relație rezultă că pentru $x \neq 0$ avem majorarea

$$|e^{i\xi x} \varphi(x)| \leq \frac{M}{x^2}.$$

Convergența integralei $\int_{-\infty}^\infty e^{i\xi x} \varphi(x) \, dx$ rezultă din convergența integralelor

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

pe baza criteriului comparației. Din faptul că φ descrește la infinit mai repede decât orice putere a lui x rezultă posibilitatea de a deriva sub integrală de un număr nelimitat de ori. Se obține astfel relația

$$(\mathcal{F}[\varphi])^{(k)}(\xi) = \int_{-\infty}^\infty (ix)^k e^{i\xi x} \varphi(x) \, dx$$

convergența integralei rezultând din existența unei constante $M_k \in (0, \infty)$ astfel încât

$$|x^{k+2} \varphi(x)| \leq M_k \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}$$

și a majorării

$$|(ix)^k e^{i\xi x} \varphi(x)| \leq \frac{M_k}{x^2}.$$

Deducem astfel că transformata Fourier $\mathcal{F}[\varphi] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este o funcție indefinit derivabilă și cu derivatele funcții mărginite. Relația

$$\mathcal{F}[\varphi^{(k)}](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi^{(k)}(x) dx = (-i\xi)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(x) dx = (-i\xi)^k \mathcal{F}[\varphi](\xi)$$

obținută utilizând integrarea prin părți conduce la egalitatea

$$|\xi^k \mathcal{F}[\varphi](\xi)| = |\mathcal{F}[\varphi^{(k)}](\xi)|$$

care arată că $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

5.3.13 Teoremă. *Transformarea Fourier a funcțiilor de probă*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \varphi \mapsto \mathcal{F}[\varphi], \quad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(x) dx$$

este o aplicație bijectivă și inversa ei este transformarea

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \psi \mapsto \mathcal{F}^{-1}[\psi], \quad \mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \psi(\xi) d\xi.$$

Demonstrație. Afirmția este o consecință directă a teoremelor anterioare.

5.3.14 Se poate arăta [30] că transformările $\mathcal{F}^{\pm 1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sunt continue, adică

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi \implies \mathcal{F}^{\pm 1}[\varphi_n] \longrightarrow \mathcal{F}^{\pm 1}[\varphi].$$

5.3.15 Transformările Fourier directă și inversă au expresii foarte asemănătoare.

Utilizând schimbarea de variabilă $\xi = -y$ obținem

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \psi(-y) dy = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\check{\psi}](x)$$

adică

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\check{\psi}]$$

unde $\check{\psi}$ este aplicația

$$\check{\psi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \check{\psi}(y) = \psi(-y).$$

În particular,

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[\varphi]](p) = \check{\varphi}.$$

5.3.16 Polinoamele Hermite (a se vedea pag. 269-6)

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

verifică relațiile de recurență

$$H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0, \quad H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x).$$

5.3.17* Teoremă. Oricare ar fi $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, funcția

$$\psi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

este o funcție proprie a transformării Fourier

$$\mathcal{F} \left[H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right] (\xi) = \sqrt{2\pi} i^n H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Demonstrație. Din relația $(\mathcal{F}[\varphi])^{(k)} = \mathcal{F}[(ix)^k \varphi]$ care se poate scrie

$$\mathcal{F}[x^k \varphi](\xi) = (-i)^k \frac{d^k}{d\xi^k} \mathcal{F}[\varphi](\xi)$$

rezultă

$$\mathcal{F} \left[H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right] = H_n \left(-i \frac{d}{d\xi} \right) \mathcal{F} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \right]$$

și prin urmare (a se vedea pag. 190-7)

$$\mathcal{F} \left[H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right] = \sqrt{2\pi} H_n \left(-i \frac{d}{d\xi} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Folosind metoda inducției matematice vom arăta că

$$H_n \left(-i \frac{d}{d\xi} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} = i^n H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Relația are loc pentru $n=0$ și presupunând că

$$H_k \left(-i \frac{d}{d\xi} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} = i^k H_k(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad \text{pentru orice } k \leq n-1$$

cu ajutorul relațiilor de recurență obținem

$$\begin{aligned} H_n \left(-i \frac{d}{d\xi} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} &= -2i \frac{d}{d\xi} H_{n-1} \left(-i \frac{d}{d\xi} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} - 2(n-1) H_{n-2} \left(-i \frac{d}{d\xi} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \\ &= -2i \frac{d}{d\xi} \left[i^{n-1} H_{n-1}(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right] - 2(n-1) i^{n-2} H_{n-2}(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \\ &= i^n [-2H'_{n-1}(\xi) + 2\xi H_{n-1}(\xi) + 2(n-1) H_{n-2}(\xi)] e^{-\frac{\xi^2}{2}} \\ &= i^n [-4(n-1) H_{n-2}(\xi) + 2\xi H_{n-1}(\xi) + 2(n-1) H_{n-2}(\xi)] e^{-\frac{\xi^2}{2}} \\ &= i^n [2\xi H_{n-1}(\xi) - 2(n-1) H_{n-2}(\xi)] e^{-\frac{\xi^2}{2}} = i^n H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}. \end{aligned}$$

5.4 Transformarea Fourier a distribuțiilor

5.4.1 O funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrabilă, adică astfel încât

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

definește o distribuție temperată T_f . Pe de altă parte, transformata sa Fourier

$$\mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x) dx$$

fiind continuă și mărginită

$$|\mathcal{F}[f](\xi)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\xi x} f(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

definește o distribuție temperată $T_{\mathcal{F}[f]}$ și din relația

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\xi) \varphi(\xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x) dx d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(\xi) d\xi dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathcal{F}[\varphi](x) dx \end{aligned}$$

rezultă că

$$\langle T_{\mathcal{F}[f]}, \varphi \rangle = \langle T_f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle. \quad (5.1)$$

5.4.2 Teoremă. Dacă

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$$

este o distribuție temperată atunci aplicația

$$\mathcal{F}[f] : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle$$

este de asemenea o distribuție temperată (transformata Fourier a lui f).

Demonstrație. A se vedea [30].

5.4.3 Propoziție. Transformarea Fourier a distribuțiilor

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : f \mapsto \mathcal{F}[f], \quad \langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle$$

este bijectivă și continuă. Inversa ei este

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : f \mapsto \mathcal{F}^{-1}[f], \quad \langle \mathcal{F}^{-1}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle.$$

Demonstrație. Avem

$$\langle \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]], \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}[f], \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]] \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

și

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]], \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]] \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ și $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Dacă $f_n \rightarrow f$, adică dacă

$$\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle \quad \text{oricare ar fi } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

atunci

$$\langle \mathcal{F}[f_n], \varphi \rangle = \langle f_n, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \rightarrow \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle$$

și prin urmare

$$f_n \rightarrow f \implies \mathcal{F}[f_n] \rightarrow \mathcal{F}[f].$$

5.4.4 Din relația (5.1) rezultă că transformarea Fourier a distribuțiilor poate fi privită ca o prelungire a transformării Fourier a funcțiilor.

5.4.5 Exercițiu. Să se arate că

$$\mathcal{F}[\delta] = 1, \quad \mathcal{F}[1] = 2\pi \delta.$$

Rezolvare. Avem

$$\langle \mathcal{F}[\delta], \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \mathcal{F}[\varphi](0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i0x} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

$$\langle \mathcal{F}[1], \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}[\delta], 2\pi \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle = \langle \delta, 2\pi \varphi \rangle = 2\pi \varphi(0) = \langle 2\pi \delta, \varphi \rangle.$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

5.4.6 MATHEMATICA: Definiția utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(t) dt$

$$\text{In}[1] := \text{FourierTransform}[1, t, x] \mapsto \text{Out}[1] = \sqrt{2\pi} \text{DiracDelta}[x]$$

5.4.7 Propoziție. *Relațiile*

$$(\mathcal{F}[f])^{(k)} = \mathcal{F}[(ix)^k f] \quad \mathcal{F}[f^{(k)}] = (-i\xi)^k \mathcal{F}[f].$$

au loc oricare ar fi distribuția temperată f .

Demonstrație. Utilizând proprietățile transformării Fourier a funcțiilor obținem

$$\begin{aligned} \langle (\mathcal{F}[f])^{(k)}, \varphi \rangle &= (-1)^k \langle \mathcal{F}[f], \varphi^{(k)} \rangle = (-1)^k \langle f, \mathcal{F}[\varphi^{(k)}] \rangle \\ &= (-1)^k \langle f, (-i\xi)^k \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle (i\xi)^k f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}[(i\xi)^k f], \varphi \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[f^{(k)}], \varphi \rangle &= \langle f^{(k)}, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = (-1)^k \langle f, (\mathcal{F}[\varphi])^{(k)} \rangle \\ &= (-1)^k \langle f, \mathcal{F}[(ix)^k \varphi] \rangle = (-1)^k \langle \mathcal{F}[f], (ix)^k \varphi \rangle = \langle (-ix)^k \mathcal{F}[f], \varphi \rangle\end{aligned}$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ și $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

5.4.8 Exercițiu. Să se arate că

$$\mathcal{F}[\delta_a] = e^{iax}, \quad \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a})\right] = \cos ax, \quad \mathcal{F}[\cos ax] = \pi(\delta_a + \delta_{-a}).$$

Rezolvare. Avem

$$\langle \mathcal{F}[\delta_a], \varphi \rangle = \langle \delta_a, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \mathcal{F}[\varphi](a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} \varphi(x) dx = \langle e^{iax}, \varphi \rangle$$

Transformarea Fourier fiind liniară obținem

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a})\right] = \frac{1}{2}(\mathcal{F}[\delta_a] + \mathcal{F}[\delta_{-a}]) = \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2} = \cos ax.$$

Din relația precedentă rezultă ca

$$\mathcal{F}^{-1}[\cos ax] = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a}).$$

Dar efectuând schimbarea de variabilă $x \mapsto -x$ obținem

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[\cos ax], \varphi \rangle &= \langle \cos ax, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \cos ax \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \varphi(t) dt \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos ax \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \varphi(t) dt \right) dx = \langle \cos ax, 2\pi \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle = \langle 2\pi \mathcal{F}^{-1}[\cos ax], \varphi \rangle\end{aligned}$$

adică

$$\mathcal{F}[\cos ax] = 2\pi \mathcal{F}^{-1}[\cos ax].$$

5.4.9 MATHEMATICA: Definiția utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(t) dt$

$$\text{In}[1] := \text{FourierTransform}[\text{Cos}[t], t, x] \mapsto \text{Out}[1] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{DiracDelta}[-1+x] + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{DiracDelta}[1+x]$$

5.4.10 Exercițiu. Să se arate că

$$\mathcal{F}[x^k] = 2\pi(-i)^k \delta^{(k)} \quad \mathcal{F}[\delta^{(k)}] = (-i\xi)^k.$$

Rezolvare. Avem

$$\mathcal{F}[x^k] = (-i)^k \mathcal{F}[(ix)^k 1] = (-i)^k (\mathcal{F}[1])^{(k)} = 2\pi(-i)^k \delta^{(k)}$$

și

$$\mathcal{F}[\delta^{(k)}] = (-i\xi)^k \mathcal{F}[\delta] = (-i\xi)^k 1 = (-i\xi)^k.$$

5.4.11 Transformarea Fourier joacă un rol fundamental în matematică și aplicațiile ei. Integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} x^k dx$$

nefiind convergentă pentru $k \in \mathbb{N}$, rezultă că funcțiile constante și cele polinomiale nu admit transformate Fourier dacă ne limităm la abordarea clasică. Utilizarea distribuțiilor temperate largeste considerabil posibilitățile de folosire a transformării Fourier în diverse modele matematice.

5.4.12* Exercițiu. Fie T_H distribuția regulată corespunzătoare funcției Heaviside

$$H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ 1 & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Să se arate că

$$\mathcal{F}[T_H] = -i\mathcal{P}\frac{1}{\xi} + \pi\delta.$$

Rezolvare. Plecând de la relația $(T_H)' = \delta$ deducem succesiv

$$\mathcal{F}[(T_H)'] = 1$$

$$-ix\mathcal{F}[T_H] = 1$$

$$\mathcal{F}[T_H] = -i\mathcal{P}\frac{1}{x} + C\delta$$

unde C este o constantă. Ultima relație este echivalentă cu

$$\langle \mathcal{F}[T_H], \varphi \rangle = -i \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle + C \langle \delta, \varphi \rangle, \quad \text{oricare ar fi } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (5.2)$$

Deoarece

$$\langle \mathcal{F}[T_H], e^{-x^2} \rangle = \langle T_H, \mathcal{F}[e^{-x^2}] \rangle = \langle T_H, \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \rangle$$

$$= \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\xi}{2}\right)^2} d\xi = 2\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \pi$$

și

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, e^{-x^2} \right\rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{-x^2}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} dx \right) = 0$$

rezultă că în cazul $\varphi(x) = e^{-x^2}$ relația (5.2) devine $\pi = C \langle \delta, e^{-x^2} \rangle = C$.

5.4.13 MATHEMATICA: Definiția utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(t) dt$

$$\text{In}[1] := \text{FourierTransform}[\text{HeavisideTheta}[t], t, x] \quad \mapsto \quad \text{Out}[1] = \frac{i}{\sqrt{2\pi} x} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{DiracDelta}[x]$$

5.4.14* Exercițiu. Să se arate că

$$\mathcal{F} \left[\mathcal{P} \frac{1}{x} \right] = \pi i T_{\text{sign}}.$$

unde T_{sign} este distribuția regulată corespunzătoare funcției

$$\text{sign} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } x < 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \\ 1 & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Rezolvare. Plecând de la relația $x \cdot \mathcal{P} \frac{1}{x} = 1$ deducem succesiv

$$\mathcal{F} \left[x \cdot \mathcal{P} \frac{1}{x} \right] = 2\pi \delta$$

$$-i \mathcal{F} \left[ix \cdot \mathcal{P} \frac{1}{x} \right] = 2\pi \delta$$

$$-i \left(\mathcal{F} \left[\mathcal{P} \frac{1}{x} \right] \right)' = 2\pi \delta$$

$$\mathcal{F} \left[\mathcal{P} \frac{1}{x} \right] = 2\pi i H + C$$

unde C este o constantă. Ultima relație este echivalentă cu

$$\left\langle \mathcal{F} \left[\mathcal{P} \frac{1}{x} \right], \varphi \right\rangle = 2\pi i \langle H, \varphi \rangle + C \langle 1, \varphi \rangle, \quad \text{oricare ar fi } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (5.3)$$

Deoarece

$$\left\langle \mathcal{F} \left[\mathcal{P} \frac{1}{x} \right], e^{-x^2} \right\rangle = \left\langle \mathcal{P} \frac{1}{x}, \mathcal{F} \left[e^{-x^2} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{P} \frac{1}{x}, \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \right\rangle = 0$$

în cazul $\varphi(x) = e^{-x^2}$ relația (5.3) devine

$$0 = 2\pi i \int_0^\infty e^{-x^2} dx + C \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$$

și conduce la $C = -\pi i$. Dar $2\pi i H - \pi i$ și sign definesc aceeași distribuție .

5.4.15 MATHEMATICA: Definiția utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{itx} \varphi(t) dt$

$$\text{In}[1] := \text{FourierTransform}[1/\mathbf{t}, \mathbf{t}, \mathbf{x}] \quad \mapsto \quad \text{Out}[1] = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{Sign}[\mathbf{x}]$$

5.4.16 Propoziție. Formula de sumare a lui Poisson

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^\infty \varphi(2n\pi) = \sum_{n=-\infty}^\infty \mathcal{F}[\varphi](n)$$

are loc oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Demonstrație. Am aratat (pag. 178-44) că în $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ are loc egalitatea

$$\sum_{n=-\infty}^\infty \delta_{2n\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^\infty e^{inx}$$

adică,

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2n\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{inx} \varphi(x) dx, \quad \text{oricare ar fi } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Se poate arăta că seriile sunt convergente și că relația are loc pentru orice $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

5.4.17 Alegând în formula de sumare a lui Poisson

$$\varphi(x) = e^{-\frac{ax^2}{4\pi^2}}$$

obținem [30] relația

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-an^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{a}}, \quad \text{oricare ar fi } a \in (0, \infty)$$

care se mai poate scrie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\kappa\pi n^2} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{\kappa} n^2}, \quad \text{oricare ar fi } \kappa \in (0, \infty).$$

5.4.18 Se poate arăta că $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ este un subspațiu dens în $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Orice distribuție cu suport compact

$$g : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

se poate prelungi unic până la o distribuție

$$\tilde{g} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

utilizând relația

$$\langle \tilde{g}, \varphi \rangle = \langle g, \eta \varphi \rangle$$

unde $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ este o funcție aleasă astfel încât

$$\eta(x) = 1 \quad \text{pe o mulțime deschisă ce include } \text{supp } g.$$

Se poate arăta că $\mathcal{F}[g]$ este o distribuția temperată regulată asociată funcției

$$\mathcal{F}[g](\xi) = \langle g(x), \eta(x) e^{i\xi x} \rangle$$

și aparține spațiului $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ (a se vedea pag. 187-21).

5.4.19 Teoremă (Transformarea Fourier a convoluției).

Dacă $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ este o distribuție temperată și dacă

$g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ este o distribuție cu suport compact atunci

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[g] \cdot \mathcal{F}[f].$$

Demonstrație. A se vedea [30]

5.4.20 Propoziție. Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ este local integrabilă cu creștere lentă și

$$F_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_r(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pentru } |x| \leq r \\ 0 & \text{pentru } |x| > r \end{cases}$$

atunci

$$\begin{aligned} a) \quad & \lim_{r \rightarrow \infty} T_{f_r} = T_f \\ b) \quad & \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{F}[T_{f_r}] = \mathcal{F}[T_f] \\ c) \quad & \mathcal{F}[f](\xi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r e^{i\xi x} f(x) dx \quad \text{în } \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Demonstrație. a) Oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ are loc relația

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \langle T_{f_r}, \varphi \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = \langle T_f, \varphi \rangle.$$

b) Transformarea Fourier a distribuțiilor fiind continuă avem

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T_{f_r} = T_f \implies \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{F}[T_{f_r}] = \mathcal{F}[T_f].$$

c) Relatia de la b) se poate scrie succesiv sub formele

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \langle \mathcal{F}[T_{f_r}], \varphi \rangle &= \langle \mathcal{F}[T_f], \varphi \rangle \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \langle T_{f_r}, \mathcal{F}[\varphi] \rangle &= \langle T_f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) \mathcal{F}[\varphi](x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathcal{F}[\varphi](x) dx \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(\xi) d\xi dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(\xi) d\xi dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r e^{i\xi x} f(x) dx \right] \varphi(\xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x) dx \right] \varphi(\xi) d\xi \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left\langle \int_{-r}^r e^{i\xi x} f(x) dx, \varphi(\xi) \right\rangle &= \langle \mathcal{F}[f](\xi), \varphi(\xi) \rangle. \end{aligned}$$

5.4.21 Dacă nu distingem două funcții care diferă doar pe o mulțime de măsură nulă, spațiul funcțiilor de pătrat integrabil (Lebesgue)

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

considerat împreună cu produsul scalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx$$

este un spațiu Hilbert.

5.4.22 Teoremă (Plancherel). *Transformarea Fourier*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

definită prin

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r e^{i\xi x} f(x) dx \quad \text{în } L^2(\mathbb{R})$$

este bijectivă, bicontinuă și are loc egalitatea Parseval

$$\langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle \quad \text{oricare ar fi } f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

5.4.23 În cazul particular $f = g$, egalitatea Parseval devine $\|\mathcal{F}[f]\|^2 = 2\pi \|f\|^2$, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

5.4.24 Teoremă. Dacă $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ atunci în $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ are loc egalitatea

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$$

Demonstrație. Dacă $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ atunci $\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \in L^2(\mathbb{R})$. Din relațiile

$$[\int |\mathcal{F}[f](\xi) \mathcal{F}[g](\xi)| d\xi]^2 \leq \int |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 d\xi \int |\mathcal{F}[g](\xi)|^2 d\xi < \infty$$

$$\begin{aligned} [\iint |f(t) g(x-t) \varphi(x)| dt dx]^2 &\leq [\iint |f(t)|^2 |\varphi(x)| dt dx] [\iint |g(x-t)|^2 |\varphi(x)| dt dx] \\ &\leq \|f\|^2 \|g\|^2 [\iint |\varphi(x)| dt dx]^2 < \infty \end{aligned}$$

rezultă că $\mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$ și $f * g$ definesc distribuții temperate. Oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[f * g], \varphi \rangle &= \langle f * g, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \int \mathcal{F}[\varphi](x) \int f(t) g(x-t) dt dx \\ &= \int f(t) \int g(x-t) \mathcal{F}[\varphi](x) dx dt \\ &= \int f(t) \int \mathcal{F}[g(x-t)](\xi) \varphi(\xi) d\xi dt \\ &= \int f(t) \int \mathcal{F}[g](\xi) \varphi(\xi) e^{i\xi t} d\xi dt = \int \mathcal{F}[f](\xi) \mathcal{F}[g](\xi) \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

5.5 Aplicații în mecanica cuantică

5.5.1 În mecanica cuantică, spectrul continuu se poate analiza urmând analogia cu spectrul discret dacă se utilizează anumite noțiuni și rezultate din teoria distribuțiilor.

5.5.2 Pe parcursul acestei secțiuni vom utiliza transformarea Fourier definită prin

$$\mathcal{F}[\varphi](p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \varphi(x) dx$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/\hbar} \psi(p) dp.$$

În această alegere, formulele

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta] &= 1, & \mathcal{F}[1] &= 2\pi \delta, & (\mathcal{F}[f])^{(k)} &= \mathcal{F}[i^k x^k f], \\ \mathcal{F}[\delta_a] &= e^{iap}, & \mathcal{F}[x^k] &= 2\pi(-i)^k \delta^{(k)}, & \mathcal{F}[f^{(k)}] &= (-ip)^k \mathcal{F}[f] \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[g] \cdot \mathcal{F}[f], \quad \mathcal{F}[e^{-ax^2}](p) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{p^2}{4a}}$$

obținute anterior, devin

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}, & \mathcal{F}[1] &= \sqrt{2\pi\hbar} \delta, & (\mathcal{F}[f])^{(k)} &= \mathcal{F}\left[\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^k x^k f\right], \\ \mathcal{F}[\delta_a] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-iap/\hbar}, & \mathcal{F}[x^k] &= (i\hbar)^k \sqrt{2\pi\hbar} \delta^{(k)}, & \mathcal{F}[f^{(k)}] &= \left(\frac{ip}{\hbar}\right)^k \mathcal{F}[f] \\ \mathcal{F}[f * g] &= \sqrt{2\pi\hbar} \mathcal{F}[g] \cdot \mathcal{F}[f], & \mathcal{F}[e^{-ax^2}](p) &= \frac{1}{\sqrt{2a\hbar}} e^{-\frac{p^2}{4a\hbar^2}}. \end{aligned}$$

5.5.3 Teoremă. Oricare ar fi distribuția f au loc relațiile

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(ax)](p) &= \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f]\left(\frac{p}{a}\right) & \mathcal{F}[f(x-b)](p) &= e^{-ipb/\hbar} \mathcal{F}[f](p) \\ \mathcal{F}[f^*(x)](p) &= (\mathcal{F}[f])^*(-p) & \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](p) &= f(-p) \end{aligned}$$

Demonstrație. Oricare ar fi funcția test φ avem

$$\mathcal{F}[\varphi(ax)](p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{-ipx/\hbar} \varphi(ax) dx = \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{-ipt/(a\hbar)} \varphi(t) dt = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[\varphi]\left(\frac{p}{a}\right).$$

Utilizând această relație și definițiile transformării Fourier și schimbării de variabilă

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle, \quad \langle f(ax), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle$$

obținem

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[f(ax)], \varphi \rangle &= \langle f(ax), \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \frac{1}{|a|} \langle f(x), \mathcal{F}[\varphi]\left(\frac{p}{a}\right) \rangle \\ &= \langle f(x), \mathcal{F}[\varphi(ax)] \rangle = \langle \mathcal{F}[f(x)], \varphi(ax) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle \mathcal{F}[f]\left(\frac{p}{a}\right), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Celelalte relații se demonstrează similar.

5.5.4 Urmând analogia cu definiția distribuțiilor de tip funcție

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

distribuția Dirac cu suportul în a

$$\delta_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

se poate scrie pur simbolic (fără a fi vorba de o integrală) sub forma

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) \varphi(x) dx$$

unde δ_a este în acest caz funcția

$$\delta_a : \mathbb{R} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}, \quad \delta_a(x) = \begin{cases} \infty & \text{dacă } x = a \\ 0 & \text{dacă } x \neq a. \end{cases}$$

Din context se poate deduce dacă δ_a este funcțională sau funcția corespunzătoare.

5.5.5 Obiectul matematic

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) \varphi(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

se comportă, în anumite limite, asemănător cu o integrală.

5.5.6 Utilizând relația (a se vedea pag. 180-51)

$$\langle f(x-a), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(x+a) \rangle$$

obținem

$$\langle \delta(x-a), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x), \varphi(x+a) \rangle = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle$$

adică

$$\delta_a = \delta(x-a).$$

5.5.7 Folosind definiția multiplicării unei distribuții f cu o funcție ϑ

$$\langle \vartheta f, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \vartheta \varphi \rangle$$

obținem

$$\langle x \delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a(x), x \varphi(x) \rangle = a \varphi(a) = \langle a \delta_a, \varphi \rangle$$

adică

$$x \delta_a = a \delta_a.$$

5.5.8 Distribuția δ_a poate fi privită ca o stare proprie a operatorului coordonată

$$\hat{x} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad \hat{x}\psi = x\psi.$$

Utilizând notația alternativă

$$|a\rangle = \delta_a$$

avem

$$\hat{x}|a\rangle = a|a\rangle.$$

5.5.9 Urmând analogia cu convoluția funcțiilor

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx$$

relația (a se vedea pag. 182-**62**)

$$\psi = \psi * \delta$$

se poate scrie formal

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \delta(t-x) dx$$

adică

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) |x\rangle. \quad (5.4)$$

Rezultă că funcționala ψ poate fi privită ca o suprapunere a stărilor $|x\rangle$.

5.5.10 Plecând de la

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t) g(t) dt \quad \text{și} \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt$$

obținem relația

$$\langle f|g\rangle = (\bar{f} * \check{g})(0) \quad \text{unde} \quad \check{g}(t) \stackrel{\text{def}}{=} g(-t)$$

adică o exprimare a produsului scalar cu ajutorul convoluției.

5.5.11 Utilizând relația (a se vedea pag. 180-**51**)

$$\langle f(cx), \varphi(x) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|c|} \left\langle f(t), \varphi\left(\frac{t}{c}\right) \right\rangle$$

obținem

$$\langle \delta_a(-x), \varphi(x) \rangle = \langle \delta_a(x), \varphi(-x) \rangle = \varphi(-a) = \langle \delta_{-a}(x), \varphi(x) \rangle$$

adică

$$\check{\delta}_a = \delta_{-a}.$$

5.5.12 Din relația (a se vedea pag. 182-62)

$$f * \delta_b = f(x - b)$$

rezultă

$$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$$

și prin urmare putem considera că

$$\langle a|b \rangle = (\delta_a * \check{\delta}_b)(0) = \delta_{a-b}(0) = \delta(b-a) = \begin{cases} \infty & \text{dacă } a=b \\ 0 & \text{dacă } a \neq b. \end{cases}$$

Am obținut cu ajutorul convoluției o extensie a produsului scalar utilizabilă și în cazul a două distribuții Dirac. Ea păstrează unele dintre caracteristicile produsului scalar, dar evident, nu este un produs scalar.

5.5.13 Din relația (a se vedea pag. 182-62)

$$\delta_a * \psi = \psi(x - a)$$

deducem că

$$\langle a|\psi \rangle = (\delta_a * \check{\psi})(0) = \psi(a)$$

și prin urmare relația (5.4), adică

$$|\psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) |x \rangle$$

se mai poate scrie

$$|\psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |x \rangle \langle x|\psi \rangle.$$

Egalitatea având loc oricare ar fi $|\psi \rangle$, rezultă că

$$\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dx |x \rangle \langle x| \tag{5.5}$$

este operatorul identitate.

5.5.14 Din relația

$$\hat{x}|\psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \hat{x}|x \rangle \langle x|\psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x |x \rangle \langle x|\psi \rangle$$

deducem că formal

$$\hat{x} = \int_{-\infty}^{\infty} dx x |x \rangle \langle x|.$$

5.5.15 Din relația

$$\mathcal{F}[\psi'](p) = \frac{i}{\hbar} p \mathcal{F}[\psi](p)$$

scrisă sub forma

$$\mathcal{F}\left[-i\hbar \frac{d\psi}{dx}\right](p) = (\hat{x} \mathcal{F}[\psi])(p)$$

deducem că

$$\mathcal{F}^{-1} \hat{x} \mathcal{F} = -i\hbar \frac{d}{dx}.$$

5.5.16 Pentru fiecare $a \in \mathbb{R}$ funcția

$$\phi_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \phi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{iax/\hbar}$$

cu proprietatea

$$\mathcal{F}[\delta_a] = \phi_{-a}, \quad \mathcal{F}^{-1}[\delta_a] = \phi_a$$

verifică relația

$$-i\hbar \frac{d}{dx} \phi_a = a \phi_a$$

adică este funcție proprie a operatorului impuls

$$\hat{p} = \mathcal{F}^{-1} \hat{x} \mathcal{F} = -i\hbar \frac{d}{dx}.$$

Utilizând notația alternativă

$$|\tilde{a}\rangle = \phi_a$$

avem

$$\hat{p} |\tilde{a}\rangle = a |\tilde{a}\rangle.$$

5.5.17 Având în vedere relația $\mathcal{F}[1] = \sqrt{2\pi\hbar} \delta$ care se poate scrie formal

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} dx = \sqrt{2\pi\hbar} \delta(p)$$

și relația

$$\langle \tilde{a} | \tilde{b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi_a(x)} \phi_b(x) dx = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(a-b)x/\hbar} dx$$

putem considera că

$$\langle \tilde{a} | \tilde{b} \rangle = \delta(a - b) = \begin{cases} \infty & \text{dacă } a = b \\ 0 & \text{dacă } a \neq b. \end{cases}$$

5.5.18 La fel ca în cazul operatorului $\hat{x}$ se pot deduce relațiile

$$\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dp |\tilde{p}\rangle \langle \tilde{p}|$$

și

$$\hat{p} = \int_{-\infty}^{\infty} dp p |\tilde{p}\rangle \langle \tilde{p}|.$$

5.5.19 Definiție. Prin *comutatorul* operatorilor $\hat{A}$ și $\hat{B}$ se înțelege operatorul

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}.$$

5.5.20 Exercițiu. Să se arate că

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] \quad (5.6)$$

Rezolvare. Avem

$$[\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{A}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} = [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}].$$

5.5.21* Teoremă (Baker-Campbell-Hausdorff).

Dacă operatorii $\hat{A}$ și $\hat{B}$ sunt astfel încât

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 \quad \text{și} \quad [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$$

atunci

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} \quad (5.7)$$

Demonstrație. Derivata operatorului

$$\hat{F}(t) = e^{t\hat{A}} e^{t\hat{B}} e^{-t(\hat{A}+\hat{B})}$$

dependent de variabila reală t verifică relația

$$\hat{F}'(t) = e^{t\hat{A}} [\hat{A}, e^{t\hat{B}}] e^{-t(\hat{A}+\hat{B})}$$

care, utilizând (5.6), se mai poate scrie

$$\hat{F}'(t) = t [\hat{A}, \hat{B}] \hat{F}(t).$$

Plecând de la această ecuație scrisă sub forma

$$(\ln F)' = t [\hat{A}, \hat{B}]$$

obținem relația

$$\int_0^1 (\ln F)' dt = \int_0^1 t [\hat{A}, \hat{B}] dt$$

care conduce la

$$F(1) = e^{\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}$$

adică

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-(\hat{A}+\hat{B})} = e^{\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}.$$

Relația obținută este echivalentă cu (5.7).

5.5.22 Propoziție. *Operatorii coordonată $\hat{x}$ și impuls $\hat{p}$ verifică relația de comutare*

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (5.8)$$

Demonstrație. Utilizând definițiile operatorilor coordonată $\hat{x}$ și impuls $\hat{p}$

$$(\hat{x}\psi)(x) = x\psi(x), \quad \hat{p}\psi = -i\hbar\psi'$$

și relația (a se vedea pag. 188-**24**)

$$(\vartheta f)' = \vartheta' f + \vartheta f'$$

obținem

$$[\hat{x}, \hat{p}]\psi = \hat{x}\hat{p}\psi - \hat{p}\hat{x}\psi = -i\hbar x\psi' + i\hbar(x\psi)' = i\hbar\psi$$

oricare ar fi $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

5.5.23 Pe spațiul funcțiilor de pătrat integrabil (în sens Lebesgue)

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

definim aplicația

$$L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} : (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx$$

cu proprietățile

$$\langle f, \alpha g + \beta h \rangle = \alpha \langle f, g \rangle + \beta \langle f, h \rangle$$

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$$

$$\langle f, f \rangle \geq 0.$$

Dacă nu distingem două funcții care diferă doar pe o mulțime de măsură nulă, atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 0 \implies f = 0$$

adică

$$\langle f, f \rangle = 0 \implies f = 0$$

și prin urmare aplicația $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ este produs scalar. Se poate arăta că $L^2(\mathbb{R})$ considerat împreună cu acest produs scalar este spațiu Hilbert.

5.5.24 Propoziție (Inegalitatea Cauchy-Schwarz). *Oricare ar fi $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ avem*

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle$$

Demonstrație. Din definiția produsului scalar rezultă relația

$$\langle f + \lambda g, f + \lambda g \rangle \geq 0 \quad \text{oricare ar fi } \lambda \in \mathbb{C}$$

care se mai poate scrie

$$\langle f, f \rangle + \bar{\lambda} \langle g, f \rangle + \lambda \langle f, g \rangle + |\lambda|^2 \langle g, g \rangle \geq 0 \quad \text{oricare ar fi } \lambda \in \mathbb{C}.$$

În cazul $g \neq 0$, alegând $\lambda = -\frac{\langle g, f \rangle}{\langle g, g \rangle}$ obținem

$$\langle f, f \rangle \langle g, g \rangle \geq |\langle f, g \rangle|^2.$$

Se constată direct ca inegalitatea are loc și în cazul $g = 0$.

5.5.25 Definiție. Fie A un operator autoadjunct și $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ o funcție normată

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

Numerele reale

$$\langle A \rangle = \langle \psi, A\psi \rangle, \quad \langle A^2 \rangle = \langle \psi, A^2\psi \rangle$$

reprezintă *valorile medii* ale observabilelor A și A^2 , iar

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

este *abaterea pătratică medie* în starea ψ .

5.5.26 Exemplu. Din relația

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sigma\sqrt{2\pi}$$

rezultă că

$$\psi_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}$$

este funcție normată. În acest caz

$$\langle \hat{x} \rangle = \langle \psi_0, \hat{x} \psi_0 \rangle = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 0$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \langle \psi_0, \hat{x}^2 \psi_0 \rangle = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$$

și prin urmare

$$\Delta \hat{x} = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2} = \sigma.$$

Deoarece (a se vedea pag. 203-2 și pag. 207-16)

$$\hat{p} = \mathcal{F}^{-1} \hat{x} \mathcal{F} = \mathcal{F}^+ \hat{x} \mathcal{F} \quad \text{și} \quad \mathcal{F}[e^{-ax^2}](p) = \frac{1}{\sqrt{2a\hbar}} e^{-\frac{p^2}{4a\hbar^2}}$$

rezultă că

$$\mathcal{F}[\psi_0](p) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} \mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}\right](p) = \sqrt[4]{\frac{2\sigma^2}{\pi\hbar^2}} e^{-\sigma^2 \frac{p^2}{\hbar^2}}$$

și

$$\begin{aligned} \langle \hat{p} \rangle &= \langle \psi_0, \mathcal{F}^+ \hat{x} \mathcal{F} \psi_0 \rangle = \langle \mathcal{F}[\psi_0], \hat{x} \mathcal{F}[\psi_0] \rangle = 0 \\ \langle \hat{p}^2 \rangle &= \langle \psi_0, \mathcal{F}^+ \hat{x}^2 \mathcal{F} \psi_0 \rangle = \langle \mathcal{F}[\psi_0], \hat{x}^2 \mathcal{F}[\psi_0] \rangle = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}. \end{aligned}$$

Se obține

$$\Delta \hat{p} = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2} = \frac{\hbar}{2\sigma}$$

și se constată că în cazul stării ψ_0 are loc relația

$$\Delta \hat{x} \cdot \Delta \hat{p} = \frac{\hbar}{2}.$$

5.5.27* Teoremă (Relația de incertitudine).

Dacă X și Y sunt operatori autoadjuncți atunci

$$\Delta X \cdot \Delta Y \geq \frac{1}{2} |\langle [X, Y] \rangle|$$

în orice stare ψ . În particular, în cazul poziție-impuls

$$\Delta \hat{x} \cdot \Delta \hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Demonstratie. Fie $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ o funcție normată și fie $\langle X \rangle = \langle \psi | X | \psi \rangle$, $\langle Y \rangle = \langle \psi | Y | \psi \rangle$.

În cazul

$$f = (X - \langle X \rangle)\psi = X\psi - \langle X \rangle\psi, \quad g = (Y - \langle Y \rangle)\psi = Y\psi - \langle Y \rangle\psi$$

inegalitatea Cauch-Schwarz devine

$$\langle X\psi - \langle X \rangle\psi, X\psi - \langle X \rangle\psi \rangle \langle Y\psi - \langle Y \rangle\psi, Y\psi - \langle Y \rangle\psi \rangle \geq |\langle X\psi - \langle X \rangle\psi, Y\psi - \langle Y \rangle\psi \rangle|^2.$$

Având în vedere că X și Y sunt operatori autoadjuncti, relația se mai poate scrie

$$(\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2)(\langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2) \geq |\langle (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle|^2$$

adică

$$(\Delta X)^2(\Delta Y)^2 \geq |\langle (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle|^2.$$

Operatorul $(X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle)$ se poate scrie ca suma dintre un operator hermitic și unul anti-hermitic

$$(X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) = \frac{1}{2}\{X - \langle X \rangle, Y - \langle Y \rangle\} + \frac{1}{2}[X, Y]$$

unde

$$\{X - \langle X \rangle, Y - \langle Y \rangle\} = (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) + (Y - \langle Y \rangle)(X - \langle X \rangle)$$

Deoarece

$$\begin{aligned} \langle \psi, \{X - \langle X \rangle, Y - \langle Y \rangle\} \psi \rangle & \text{este număr real} \\ \langle \psi, [X, Y] \psi \rangle & \text{este număr pur imaginar} \end{aligned}$$

rezulta că

$$|\langle (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle [X, Y] \rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle \{X - \langle X \rangle, Y - \langle Y \rangle\} \rangle|^2 \geq \frac{1}{4}|\langle [X, Y] \rangle|^2.$$

și prin urmare

$$(\Delta X)^2(\Delta Y)^2 \geq \frac{1}{4}|\langle [X, Y] \rangle|^2$$

adică

$$\Delta X \cdot \Delta Y \geq \frac{1}{2}|\langle [X, Y] \rangle|.$$

5.5.28 Exercițiu. Să se arate că

$$e^{i(\alpha\hat{x} + \beta\hat{p})/\hbar} = e^{i\alpha\beta/(2\hbar)} e^{i\alpha\hat{x}/\hbar} e^{i\beta\hat{p}/\hbar}. \quad (5.9)$$

Rezolvare. Din (5.7) și (5.8) rezultă

$$e^{i(\alpha\hat{x} + \beta\hat{p})/\hbar} = e^{i\alpha\hat{x}/\hbar} e^{i\beta\hat{p}/\hbar} e^{-\frac{1}{2}[i\alpha\hat{x}/\hbar, i\beta\hat{p}/\hbar]} = e^{i\alpha\hat{x}/\hbar} e^{i\beta\hat{p}/\hbar} e^{i\alpha\beta/(2\hbar)}.$$

5.5.29 Exercițiu. Să se arate că

$$(e^{i\alpha\hat{x}/\hbar}\psi)(x) = (e^{i\alpha x/\hbar}\psi)(x) \quad (e^{i\beta\hat{p}/\hbar}\psi)(x) = \psi(x + \beta)$$

$$e^{i\alpha\hat{x}/\hbar}|b\rangle = e^{i\alpha b/\hbar}|b\rangle \quad e^{i\beta\hat{p}/\hbar}|b\rangle = |b - \beta\rangle$$

$$\langle a|e^{i\alpha\hat{x}/\hbar}|b\rangle = e^{i\alpha b/\hbar}\delta(a - b) \quad \langle a|e^{i\beta\hat{p}/\hbar}|b\rangle = \delta(a - b + \beta)$$

și

$$\langle a|e^{i(\alpha\hat{x} + \beta\hat{p})/\hbar}|b\rangle = e^{i\alpha(a + b)/(2\hbar)}\delta(a - b + \beta). \quad (5.10)$$

Rezolvare. Ținând seama de dezvoltarea în serie Taylor a unei funcții obținem

$$\begin{aligned}
 e^{i\alpha\hat{x}/\hbar}\psi &= \left(1 + \frac{1}{1!}\frac{i\alpha}{\hbar}\hat{x} + \frac{1}{2!}\frac{(i\alpha)^2}{\hbar^2}\hat{x}^2 + \dots\right)\psi \\
 &= \left(1 + \frac{1}{1!}\frac{i\alpha}{\hbar}x + \frac{1}{2!}\frac{(i\alpha)^2}{\hbar^2}x^2 + \dots\right)\psi = e^{i\alpha x/\hbar}\psi \\
 \left(e^{i\beta\hat{p}/\hbar}\psi\right)(x) &= \left(1 + \frac{1}{1!}\frac{i\beta}{\hbar}\hat{p} + \frac{1}{2!}\frac{(i\beta)^2}{\hbar^2}\hat{p}^2 + \dots\right)\psi(x) \\
 &= \left(1 + \frac{\beta}{1!}\frac{d}{dx} + \frac{\beta^2}{2!}\frac{d^2}{dx^2} + \dots\right)\psi(x) \\
 &= \psi(x) + \frac{\psi'(x)}{1!}\beta + \frac{\psi''(x)}{2!}\beta^2 + \dots = \psi(x+\beta).
 \end{aligned}$$

Deoarece $x\delta_b = b\delta_b$ și $\delta_b(x) = \delta(x-b)$, în cazul $\psi = \delta_b = |b\rangle$ relațiile anterioare devin

$$e^{i\alpha\hat{x}/\hbar}\delta_b = e^{i\alpha b/\hbar}\delta_b \quad \left(e^{i\beta\hat{p}/\hbar}\delta_b\right)(x) = \delta_b(x+\beta)$$

adică

$$e^{i\alpha\hat{x}/\hbar}|b\rangle = e^{i\alpha b/\hbar}|b\rangle \quad e^{i\beta\hat{p}/\hbar}|b\rangle = |b-\beta\rangle.$$

Utilizând relația (5.9) obținem

$$\begin{aligned}
 \langle a|e^{i(\alpha\hat{x}+\beta\hat{p})/\hbar}|b\rangle &= e^{i\alpha\beta/(2\hbar)} \langle a|e^{i\alpha\hat{x}/\hbar}e^{i\beta\hat{p}/\hbar}|b\rangle \\
 &= e^{i\alpha\beta/(2\hbar)} \int du \langle a|e^{i\alpha\hat{x}/\hbar}|u\rangle \langle u|e^{i\beta\hat{p}/\hbar}|b\rangle \\
 &= e^{i\alpha\beta/(2\hbar)} \int du e^{i\alpha u/\hbar} \delta(a-u) \delta(u-b+\beta) \\
 &= e^{i\alpha(a+b)/(2\hbar)} \delta(a-b+\beta).
 \end{aligned}$$

5.5.30 *Cuantificarea Weyl.* Unei funcții $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definite pe spațiul fazelor $\mathbb{R}^2$ care poate fi scrisă sub forma

$$A(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint d\alpha d\beta f(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta p)/\hbar} \quad (5.11)$$

i se asociază operatorul

$$\hat{A}(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint d\alpha d\beta f(\alpha, \beta) e^{i(\alpha\hat{x} + \beta\hat{p})/\hbar}. \quad (5.12)$$

5.5.31 *Transformarea Wigner.* Unui operator $\hat{A}$ i se asociază funcția

$$\begin{aligned}
 A_w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad A_w(x, p) &= 2 \int du e^{2ipu/\hbar} \left\langle x-u \left| \hat{A} \right| x+u \right\rangle \\
 &= \int dv e^{ipv/\hbar} \left\langle x-\frac{v}{2} \left| \hat{A} \right| x+\frac{v}{2} \right\rangle
 \end{aligned} \quad (5.13)$$

definită pe spațiul fazelor $\mathbb{R}^2$ și numită *funcția Wigner*.

5.5.32* Teoremă.

Transformarea Wigner și cuantificarea Weyl sunt operații inverse una alteia.

Demonstrație. Transformarea Wigner este inversa cuantificării Weyl:

Funcția Wigner asociată operatorului (5.12) este

$$\begin{aligned} A_w(x, p) &= 2 \int du e^{2ipu/\hbar} \langle x-u | \hat{A}(\hat{x}, \hat{p}) | x+u \rangle \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} \iiint d\alpha d\beta du e^{2ipu/\hbar} f(\alpha, \beta) \langle x-u | e^{i(\alpha\hat{x}+\beta\hat{p})/\hbar} | x+u \rangle. \end{aligned}$$

Pentru a arăta că $A_w = A$ este suficient să arătăm că

$$2 \int du e^{2ipu/\hbar} \langle x-u | e^{i(\alpha\hat{x}+\beta\hat{p})/\hbar} | x+u \rangle = e^{i(\alpha x + \beta p)/\hbar}.$$

Utilizând formula (5.10) obținem

$$\begin{aligned} 2 \int du e^{2ipu/\hbar} \langle x-u | e^{i(\alpha\hat{x}+\beta\hat{p})/\hbar} | x+u \rangle &= 2 \int du e^{2ipu/\hbar} e^{i\alpha x/\hbar} \delta(\beta-2u) \\ &= e^{i\alpha x/\hbar} \int dv e^{ipv/\hbar} \delta(\beta-v) = e^{i(\alpha x + \beta p)/\hbar}. \end{aligned}$$

Cuantificarea Weyl este inversa transformării Wigner:

Transformata Wigner a unui operator $\hat{A}$ este funcția $A_w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, unde

$$A_w(x, p) = 2 \int du e^{2ipu/\hbar} \langle x-u | \hat{A} | x+u \rangle = \int dv e^{ipv/\hbar} \left\langle x - \frac{v}{2} \left| \hat{A} \right| x + \frac{v}{2} \right\rangle.$$

Din relația precedentă deducem că (a se vedea pag. 188-2)

$$\left\langle x - \frac{v}{2} \left| \hat{A} \right| x + \frac{v}{2} \right\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{-ipv/\hbar} A_w(x, p)$$

și prin urmare elementele de matrice ale lui $\hat{A}$ se pot scrie sub forma

$$\langle a | \hat{A} | b \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{-ip(b-a)/\hbar} A_w\left(\frac{a+b}{2}, p\right). \quad (5.14)$$

Prin cuantificarea Weyl, funcției $A_w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ i se asociază operatorul

$$\hat{A}_w(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iiint dx dp d\alpha d\beta A_w(x, p) e^{-i(\alpha x + \beta p)/\hbar} e^{i(\alpha\hat{x} + \beta\hat{p})/\hbar}.$$

Calculând elementele de matrice obținem (a se vedea relația (5.10))

$$\begin{aligned} \langle a | \hat{A}_w(\hat{x}, \hat{p}) | b \rangle &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iiint dx dp d\alpha d\beta A_w(x, p) e^{-i(\alpha x + \beta p)/\hbar} \langle a | e^{i(\alpha\hat{x} + \beta\hat{p})/\hbar} | b \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iiint dx dp d\alpha d\beta A_w(x, p) e^{-i(\alpha x + \beta p)/\hbar} e^{i\alpha(a+b)/(2\hbar)} \delta(a-b+\beta) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dx dp d\beta A_w(x, p) e^{-i\beta p/\hbar} \delta\left(\frac{a+b}{2} - x\right) \delta(a-b+\beta) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dp d\beta A_w\left(\frac{a+b}{2}, p\right) e^{-i\beta p/\hbar} \delta(a-b+\beta) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp A_w\left(\frac{a+b}{2}, p\right) e^{-ip(b-a)/\hbar} = \langle a | \hat{A} | b \rangle \end{aligned}$$

adică $\hat{A}_w(\hat{x}, \hat{p}) = \hat{A}$.

5.5.33 Dacă $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ este o bază ortonormată în spațiul Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ și dacă $\hat{A}$ este un operator liniar astfel încât seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi_n | \hat{A} | \varphi_n \rangle$$

este convergentă, atunci utilizând relația formală (a se vedea pag. 206-**5.5**)

$$\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \langle x|$$

obținem

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi_n | \hat{A} | \varphi_n \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \iint da db \langle \varphi_n | a \rangle \langle a | \hat{A} | b \rangle \langle b | \varphi_n \rangle \\ &= \iint da db \langle a | \hat{A} | b \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \langle b | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | a \rangle \\ &= \iint da db \langle a | \hat{A} | b \rangle \langle b | a \rangle = \iint da db \langle a | \hat{A} | b \rangle \delta(b-a) \\ &= \int da \langle a | \hat{A} | a \rangle. \end{aligned}$$

Putem astfel să definim formal *urma unui operator* $\hat{A}$ ca fiind

$$\text{Tr } \hat{A} = \int dx \langle x | \hat{A} | x \rangle$$

5.5.34* Teoremă. *Urma unui operator $\hat{A}$ se poate calcula folosind funcția Wigner*

$$\text{Tr } \hat{A} = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dp dx A_w(x, p).$$

Demonstrație. Deoarece $\mathcal{F}[1] = \sqrt{2\pi\hbar} \delta$ adică

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dv e^{ipv/\hbar} = \sqrt{2\pi\hbar} \delta(v) \quad (5.15)$$

avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dp dx A_w(x, p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dp dx \int dv e^{ipv/\hbar} \left\langle x - \frac{v}{2} \left| \hat{A} \right| x + \frac{v}{2} \right\rangle \\ &= \int dx \int dv \delta(v) \left\langle x - \frac{v}{2} \left| \hat{A} \right| x + \frac{v}{2} \right\rangle = \int dx \langle x | \hat{A} | x \rangle = \text{Tr } \hat{A}. \end{aligned}$$

5.5.35 Dacă funcția $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ este astfel încât

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 = 1$$

atunci operatorul *proiecție ortogonală* pe ψ

$$\hat{P}_\psi = |\psi\rangle \langle \psi|$$

adică operatorul

$$\hat{P}_\psi \varphi = \langle \psi, \varphi \rangle \psi$$

respectiv

$$\hat{P}_\psi |\varphi\rangle = |\psi\rangle \langle \psi | \varphi \rangle$$

în notațiile lui Dirac, este auto-adjunct

$$\langle \hat{P}_\psi \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, \psi \rangle \langle \psi, \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, \hat{P}_\psi \varphi_2 \rangle$$

pozitiv

$$\langle \varphi | \hat{P}_\psi | \varphi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle \langle \psi | \varphi \rangle = |\langle \psi | \varphi \rangle|^2 \geq 0$$

și are urma egală cu 1

$$\text{Tr } \hat{P}_\psi = \int dx \langle x | \hat{P}_\psi | x \rangle = \int dx \langle x | \psi \rangle \langle \psi | x \rangle = \int dx |\psi(x)|^2 = 1$$

5.5.36 Exercițiu. Să se arate că dacă A este un operator autoadjunct atunci valoarea medie a observabilei corespunzătoare în starea ψ

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi, A\psi \rangle$$

verifică relația

$$\langle A \rangle_\psi = \text{Tr} (\hat{A} \hat{P}_\psi)$$

Rezolvare.

Alegând o bază ortonormată $(\psi_n)_{n=0}^\infty$ în spațiul Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ obținem

$$\begin{aligned} \langle \psi, A\psi \rangle &= \sum_{n,k=0}^\infty \langle \psi | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \hat{A} | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \psi \rangle \\ &= \sum_{n,k=0}^\infty \langle \psi_n | \hat{A} | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \psi \rangle \langle \psi | \psi_n \rangle = \text{Tr} (\hat{A} \hat{P}_\psi). \end{aligned}$$

5.5.37 Pentru a descrie starea sistemului cuantic, în locul funcției de undă ψ se poate utiliza operatorul proiecție ortogonală $\hat{P}_\psi = |\psi\rangle \langle \psi|$ asociat care este autoadjunct, pozitiv și are urma egală cu 1.

5.5.38 Definiție. Operatorii autoadjuncți $\hat{\rho}$ cu proprietățile

$$\hat{\rho} \geq 0 \quad \text{și} \quad \text{Tr } \hat{\rho} = 1$$

se numesc *operatori densitate*.

5.5.39 Operatorii densitate descriu *stări generalizate* ale sistemului cuantic.

Operatorii densitate de forma $\hat{P}_\psi = |\psi\rangle \langle \psi|$ descriu *stări pure* iar ceilalți operatori densitate descriu *stări mixte*. Valoarea medie a observabilei $\hat{A}$

în starea descrisă de operatorul densitate $\hat{\rho}$ este

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}).$$

5.5.40 Transformata Wigner a operatorului densitate $\hat{\rho}$ este funcția

$$\begin{aligned} A_w : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}, & A_w(x, p) &= 2 \int du e^{2ipu/\hbar} \langle x-u | \hat{\rho} | x+u \rangle \\ & & &= \int dv e^{ipv/\hbar} \langle x-\frac{v}{2} | \hat{\rho} | x+\frac{v}{2} \rangle. \end{aligned}$$

5.5.41 Definiție. Distribuția Wigner asociată operatorului densitate $\hat{\rho}$ este

$$\begin{aligned} W : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}, & W(x, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int du e^{2ipu/\hbar} \langle x-u | \hat{\rho} | x+u \rangle \\ & & &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{ipv/\hbar} \langle x-\frac{v}{2} | \hat{\rho} | x+\frac{v}{2} \rangle. \end{aligned}$$

În cazul particular $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, distribuția Wigner asociată este

$$\begin{aligned} W : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}, & W(x, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int du e^{2ipu/\hbar} \psi(x-u) \psi^*(x+u) \\ & & &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{ipv/\hbar} \psi\left(x-\frac{v}{2}\right) \psi^*\left(x+\frac{v}{2}\right). \end{aligned}$$

5.5.42* Teoremă.

Dacă A_w și B_w sunt transformatele Wigner ale operatorilor $\hat{A}$ și $\hat{B}$ atunci

$$\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dp dx A_w(x, p) B_w(x, p).$$

Demonstrație. Conform relației (5.14) avem

$$\begin{aligned} \langle a | \hat{A} | q \rangle &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int du e^{-iu(q-a)/\hbar} A_w\left(\frac{a+q}{2}, u\right) \\ \langle q | \hat{B} | b \rangle &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{-iv(b-q)/\hbar} B_w\left(\frac{q+b}{2}, v\right) \end{aligned}$$

și prin urmare elementul de matrice $\langle a | \hat{A}\hat{B} | b \rangle = \int dq \langle a | \hat{A} | q \rangle \langle q | \hat{B} | b \rangle$ se poate scrie

$$\langle a | \hat{A}\hat{B} | b \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iiint dq du dv A_w\left(\frac{a+q}{2}, u\right) B_w\left(\frac{q+b}{2}, v\right) e^{-\frac{i}{\hbar}[u(q-a)+v(b-q)]}.$$

Transformata Wigner $(AB)_w$ a operatorului $\hat{A}\hat{B}$

$$\begin{aligned} (AB)_w(x, p) &= \frac{1}{2(\pi\hbar)^2} \iiint dz dq du dv A_w\left(\frac{x-z+q}{2}, u\right) B_w\left(\frac{x+z+q}{2}, v\right) \\ &\quad \times e^{-\frac{i}{\hbar}[u(q-x+z)-v(q-x-z)-2pz]} \end{aligned}$$

în urma schimbării de variabilă $a = \frac{1}{2}(x-z+q)$, $b = \frac{1}{2}(x+z+q)$ devine

$$(AB)_w(x, p) = \frac{1}{(\pi\hbar)^2} \iiint da db du dv A_w(a, u) B_w(b, v) e^{-\frac{2i}{\hbar}[u(b-x)+v(x-a)+p(a-b)]}$$

și prin urmare (a se vedea pag. 215-34 și relația (5.15))

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dp dx (AB)_w(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iiint da db du dv A_w(a, u) B_w(b, v) \\ &\quad \times e^{-\frac{2i}{\hbar}(ub-v a)} \frac{1}{(\pi\hbar)^2} \int dx e^{\frac{2i}{\hbar}x(u-v)} \int dp e^{\frac{2i}{\hbar}p(b-a)} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iiint da db du dv A_w(a, u) B_w(b, v) e^{-\frac{2i}{\hbar}(ub-v a)} \delta(u-v) \delta(b-a) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint da du A_w(a, u) B_w(a, u). \end{aligned}$$

5.5.43* Teoremă. *Valoarea medie a observabilei $\hat{A}$ în starea $\hat{\rho}$ se poate calcula folosind distribuția Wigner asociată*

$$\langle \hat{A} \rangle = \iint dx dp A_w(x, p) W(x, p).$$

Demonstrație. Conform teoremei precedente

$$\text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dp dx A_w(x, p) \varrho_w(x, p) = \iint dx dp A_w(x, p) W(x, p).$$

5.5.44* Teoremă (Invarianța Galilei).

Dacă $W(x, p)$ este distribuția Wigner corespunzătoare stării $\hat{\rho} = |\psi(x)\rangle\langle\psi(x)|$ atunci:

- a) *distribuția corespunzătoare stării $|\psi(x+x_0)\rangle\langle\psi(x+x_0)|$ este $W(x+x_0, p)$*
- b) *distribuția corespunzătoare stării $|e^{ip_0x/\hbar}\psi(x)\rangle\langle e^{ip_0x/\hbar}\psi(x)|$ este $W(x, p-p_0)$.*

Demonstrație. Notând $\varphi(x) = \psi(x+x_0)$ și $\eta(x) = e^{ip_0x/\hbar}\psi(x)$ obținem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{ipv/\hbar} \varphi\left(x - \frac{v}{2}\right) \varphi^*\left(x + \frac{v}{2}\right) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{ipv/\hbar} \psi\left(x+x_0 - \frac{v}{2}\right) \psi^*\left(x+x_0 + \frac{v}{2}\right) \\ \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{ipv/\hbar} \eta\left(x - \frac{v}{2}\right) \eta^*\left(x + \frac{v}{2}\right) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{i(p-p_0)v/\hbar} \psi\left(x - \frac{v}{2}\right) \psi^*\left(x + \frac{v}{2}\right). \end{aligned}$$

5.5.45* Teoremă. *Distribuția Wigner corespunzătoare unei stări $\hat{\rho}$ este reală.*

Demonstrație. Efectuând schimbarea de variabilă $v \mapsto -v$ obținem că

$$\begin{aligned} W(x, p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{ipv/\hbar} \left\langle x - \frac{v}{2} \left| \hat{\rho} \right| x + \frac{v}{2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{-ipv/\hbar} \left\langle x + \frac{v}{2} \left| \hat{\rho} \right| x - \frac{v}{2} \right\rangle = \overline{W(x, p)}. \end{aligned}$$

În cazul stării pure $\hat{\rho} = |\psi(x)\rangle\langle\psi(x)|$ funcția

$x \mapsto |\psi(x)|^2$ reprezintă densitatea de probabilitate pentru poziție, iar

$p \mapsto |\mathcal{F}[\psi](p)|^2$ reprezintă densitatea de probabilitate pentru impuls în sensul că

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\psi(x)|^2 dx \quad \text{este probabilitatea de a găsi particula în intervalul } [\alpha, \beta]$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\mathcal{F}[\psi](p)|^2 dp \quad \text{este probabilitatea de a avea impulsul în intervalul } [\alpha, \beta].$$

5.5.46* Teoremă. Densitățile de probabilitate pentru poziție și impuls în starea pură $\hat{\rho} = |\psi(x)\rangle\langle\psi(x)|$ se pot obține din distribuția Wigner

$$|\psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, p) dp, \quad |\mathcal{F}[\psi](p)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, p) dx.$$

Demonstrație. Utilizând (5.15) și relațiile de la pag. 202-24 și pag. 203-3 obținem

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} W(x, p) dp &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv \left(\int dp e^{ipv/\hbar} \right) \psi\left(x - \frac{v}{2}\right) \psi^*\left(x + \frac{v}{2}\right) \\ &= \int dv \delta(v) \psi\left(x - \frac{v}{2}\right) \psi^*\left(x + \frac{v}{2}\right) = |\psi(x)|^2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} W(x, p) dx &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{ipv/\hbar} \int dx \psi\left(x - \frac{v}{2}\right) \psi^*\left(x + \frac{v}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{ipv/\hbar} \int dt \psi(t-v) \psi^*(t) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{-ipv/\hbar} \int dt \psi(v-t) \check{\psi}^*(t) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dv e^{-ipv/\hbar} (\psi * \check{\psi}^*)(v) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \mathcal{F}[\psi * \check{\psi}^*](p) = \mathcal{F}[\check{\psi}](p) \cdot \mathcal{F}[\check{\psi}^*](p) = |\mathcal{F}[\psi](p)|^2. \end{aligned}$$

5.5.47* Teoremă. Modulul produsului scalar a două stări ψ și φ se poate obține utilizând distribuțiile Wigner corespunzătoare W_{ψ} și W_{φ}

$$|\langle\psi, \varphi\rangle|^2 = 2\pi\hbar \iint dx dp W_{\psi}(x, p) W_{\varphi}(x, p).$$

Demonstrație. Utilizând relația $\mathcal{F}[1] = \sqrt{2\pi\hbar} \delta$ care se mai poate scrie

$$\int e^{-ipx} dx = 2\pi\hbar \delta(p)$$

obținem

$$\begin{aligned} 2\pi\hbar \iint dx dp W_{\psi}(x, p) W_{\varphi}(x, p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iiint dx dp du dv e^{ip(u+v)/\hbar} \psi\left(x - \frac{u}{2}\right) \psi^*\left(x + \frac{u}{2}\right) \varphi\left(x - \frac{v}{2}\right) \varphi^*\left(x + \frac{v}{2}\right) \\ &= \iiint dx du dv \delta(u+v) \psi\left(x - \frac{u}{2}\right) \psi^*\left(x + \frac{u}{2}\right) \varphi\left(x - \frac{v}{2}\right) \varphi^*\left(x + \frac{v}{2}\right) \\ &= \iint dx du \psi\left(x - \frac{u}{2}\right) \psi^*\left(x + \frac{u}{2}\right) \varphi\left(x + \frac{u}{2}\right) \varphi^*\left(x - \frac{u}{2}\right) \\ &= \iint dy dz \psi(y) \psi^*(z) \varphi(z) \varphi^*(y) = \langle\psi, \varphi\rangle \langle\varphi, \psi\rangle = |\langle\psi, \varphi\rangle|^2. \end{aligned}$$

5.5.48 Operatorii coordonată $\hat{x}$ și impuls $\hat{p}$ verifică relația (a se vedea pag. 209-**5.8**)

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

adică relația

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \mathbb{I}$$

unde $\mathbb{I}$ este operatorul identitate. Operatorii de *anihilare* și *creare*

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\hat{x} + i\hat{p}), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\hat{x} - i\hat{p})$$

verifică relația de comutare

$$[a, a^+] = \mathbb{I}.$$

5.5.49 Se poate arăta că funcțiile $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ unde

$$\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{n! 2^n}} H_n \left(\frac{x}{\sqrt{\hbar}} \right) e^{-\frac{x^2}{2\hbar}}$$

formează o bază ortonormată în spațiul $L^2(\mathbb{R})$.

5.5.50 Utilizând pentru φ_n notația $|n\rangle$ cu sensul

$$\varphi_n(x) = \langle x | n \rangle$$

și proprietățile polinoamelor Hermite se pot obține relațiile

$$a|0\rangle = 0, \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n |0\rangle, \quad \langle n | m \rangle = \delta_{nm}$$

și

$$a|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad a^+a|n\rangle = n|n\rangle.$$

5.5.51 Utilizând identitatea Baker-Campbell-Hausdorff (a se vedea pag. 208-**21**)

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}$$

deducem că operatorul

$$D(z) = e^{za^+ - \bar{z}a}$$

dependent de parametrul $z \in \mathbb{C}$ se mai poate scrie sub forma

$$D(z) = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{za^+} e^{-\bar{z}a}$$

sau sub forma

$$D(z) = e^{\frac{|z|^2}{2}} e^{-\bar{z}a} e^{za^+}.$$

Utilizând definițiile operatorilor implicați obținem relația

$$D\left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\alpha + \beta i)\right)\psi(x) = e^{-\frac{i\alpha\beta}{2\hbar}} e^{i\beta x/\hbar} \psi(x - \alpha).$$

echivalentă cu

$$\langle x | D\left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\alpha + \beta i)\right) | \psi \rangle = e^{-\frac{i\alpha\beta}{2\hbar}} e^{i\beta x/\hbar} \langle x - \alpha | \psi \rangle$$

și

$$D\left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\alpha + \beta i)\right) = e^{-\frac{i\alpha\beta}{2\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\beta x/\hbar} |x\rangle \langle x - \alpha|$$

adică

$$D\left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\alpha + \beta i)\right) = e^{\frac{i\alpha\beta}{2\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\beta x/\hbar} |x + \alpha\rangle \langle x|.$$

5.5.52 Deoarece vectorii $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$ formează o bază ortonormată

$$\langle n | m \rangle = \delta_{nm}$$

și

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n | \psi \rangle = |\psi\rangle, \quad \text{oricare ar fi } |\psi\rangle.$$

Ultima a relație scrisă operatorial sub forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \mathbb{I}$$

reprezintă *rezoluția identității* corespunzătoare bazei considerate.

Orice vector $|\psi\rangle$ este bine determinat de coordonatele corespunzătoare $\langle n | \psi \rangle$.

5.5.53 Teoremă. *Sistemul de vectori $\{|z\rangle\}_{z \in \mathbb{C}}$, unde (a se vedea pag. 128-8)*

$$|z\rangle = D(z)|0\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{za^+} |0\rangle$$

adică

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

este format din vectori unitari

$$\langle z | z \rangle = 1$$

și are loc relația operatorială (numită *rezoluție a identității*)

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2 z |z\rangle \langle z| = \mathbb{I}$$

$$\text{unde } d^2 z = d\Re z \cdot d\Im z.$$

Demonstrație. Oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$ avem

$$\langle z|z \rangle = e^{-|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \right|^2 = e^{-|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{n!} = 1.$$

Notând $z = \alpha + \beta i = r e^{i\theta}$ și utilizând relația

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta} = 2\pi \delta_{nm}$$

obținem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2 z |z\rangle \langle z| &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\iint d\alpha d\beta e^{-(\alpha^2 + \beta^2)} \frac{(\alpha + \beta i)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\alpha - \beta i)^m}{\sqrt{m!}} \right) |n\rangle \langle m| \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n! m!}} \left(\int_0^{\infty} dr r^{n+m+1} e^{-r^2} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta} \right) |n\rangle \langle m| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(2 \int_0^{\infty} dr r^{2n+1} e^{-r^2} \right) |n\rangle \langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\int_0^{\infty} dt t^n e^{-t} \right) |n\rangle \langle n|. \end{aligned}$$

Deoarece, integrând prin părți

$$\int_0^{\infty} dt t^n e^{-t} = n \int_0^{\infty} dt t^{n-1} e^{-t} = n(n-1) \int_0^{\infty} dt t^{n-2} e^{-t} = \dots = n!$$

deducem că

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2 z |z\rangle \langle z| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \mathbb{I}.$$

5.5.54 Din rezoluția identității rezultă că

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2 z |z\rangle \langle z|\psi\rangle$$

adică orice element $|\psi\rangle$ este bine determinat de funcția corespunzătoare

$$\psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \psi(z) = \langle z|\psi\rangle$$

și în plus,

$$\langle \psi|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2 z |\langle z|\psi\rangle|^2.$$

Deși sistemul de vectori $\{|z\rangle\}_{z \in \mathbb{C}}$ nu este liniar independent

$$|z\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2 z' |z'\rangle \langle z'|z\rangle$$

și nici ortogonal

$$\langle z|z'\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}|z'|^2 + \bar{z}z'}$$

dezvoltarea

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2z |z\rangle \langle z|\psi\rangle$$

este similară dezvoltării în raport cu o bază ortonormată .

Sistemul de vectori $\{|z\rangle\}_{z \in \mathbb{C}}$ este numit *sistemul stărilor coerente standard*.

5.5.55 Sistemul de stări coerente $\{|z\rangle\}_{z \in \mathbb{C}}$ are și alte proprietăți remarcabile:

a) În stările $|z\rangle$ se atinge minimul în relația de incertitudine coordonată-impuls

$$\Delta \hat{x} \Delta \hat{p} = \frac{\hbar}{2}.$$

b) Stările corente standard $|z\rangle$ sunt stări proprii ale operatorului de anihilare

$$a|z\rangle = z|z\rangle.$$

5.5.56 În general, formulele prezentate pe parcursul acestei secțiuni pot fi considerate cazuri limită pentru formule similare din cazul finit-dimensional (a se vedea tabelul de la pagina 162).

Capitolul 6

Ecuatii și sisteme de ecuații diferențiale liniare

6.1 Ecuatii diferențiale de ordinul întâi

6.1.1 Definiție. O *ecuație diferențială de ordinul întâi* este o ecuație de forma

$$F(x, y, y') = 0 \quad (6.1)$$

unde x este variabila independentă, y funcția necunoscută, y' derivata funcției necunoscute și $F : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, I fiind un interval. Prin *soluție* a ecuației (6.1) se înțelege o funcție derivabilă

$$\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu $(a, b) \subseteq I$ și astfel încât

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

6.1.2 Definiție. Spunem că ecuația diferențială

$$y' = f(x, y) \quad \text{unde } f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (6.2)$$

este o ecuație diferențială scrisă sub *formă normală*.

Prin *soluție* a ecuației (6.2) se înțelege o funcție derivabilă

$$\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât

- 1) $(x, \varphi(x)) \in D, \quad \forall x \in (a, b)$
- 2) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad \forall x \in (a, b).$

6.1.3 Ecuația (6.2) se mai poate scrie

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (6.3)$$

sau sub forma

$$dy = f(x, y) dx \quad (6.4)$$

numită *formă simetrică*. Soluția ecuației (6.4) se poate căuta sub forma

$$y = y(x)$$

sau

$$x = x(y)$$

sau, mai general, sub formă parametrică

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$$

Ecuația (6.4) este caz particular pentru ecuația

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad \text{unde } P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (6.5)$$

care este *forma generală a unei ecuații simetrice*.

Prin soluție a ecuației (6.5) se înțelege o pereche de aplicații derivabile

$$\varphi, \psi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât

- 1) $(\varphi(t), \psi(t)) \in D, \quad \forall t \in (a, b)$
- 2) $P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) = 0, \quad \forall t \in (a, b).$

6.1.4 Se știe că dacă

$$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

este o funcție continuă atunci funcția

$$F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

este o primitivă a lui f oricare ar fi $x_0 \in (a, b)$, adică avem

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{x_0}^x f(t) dt \right) = f(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

6.1.5 Teoremă. Fie ecuația cu variabile separabile

$$y' = f(x) g(y) \quad (6.6)$$

unde $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue definite pe intervalele I și J .

a) Dacă $y_0 \in J$ este astfel încât $g(y_0) = 0$ atunci funcția constantă

$$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = y_0$$

este soluție a ecuației (6.6).

b) Dacă $y_0 \in J$ este astfel încât $g(y_0) \neq 0$ atunci relația

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{g(u)} du = \int_{x_0}^x f(v) dv + C \quad (6.7)$$

unde $x_0 \in I$ și C este o constantă, definește implicit o soluție locală

$y = y(x)$ a ecuației (6.6).

Demonstrație. a) Deoarece $\varphi'(x) = 0$ și $g(\varphi(x)) = g(y_0) = 0$ rezultă că

$$\varphi'(x) = f(x) g(\varphi(x)), \quad \forall x \in I.$$

b) Derivând relația (6.7) în raport cu x considerând $y = y(x)$ rezultă

$$\frac{1}{g(y(x))} y'(x) = f(x)$$

adică

$$y'(x) = f(x) g(y(x)).$$

6.1.6 Exercițiu. Să se rezolve ecuația

$$y' = xy.$$

Rezolvare. Funcția constantă $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 0$ este soluție a ecuației.

Scriind ecuația sub forma

$$\frac{y'}{y} = x \quad \text{echivalentă cu} \quad (\ln y)' = x$$

deducem că

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + c \quad \text{adică} \quad y(x) = C_1 e^{\frac{x^2}{2}}$$

unde c și $C_1 = e^c$ sunt constante.

6.1.7 MATHEMATICA: DSolve[eqns, y[x], x]

$$\text{In}[1] := \text{DSolve}[y'[x] == x y[x], y[x], x] \mapsto \text{Out}[1] = \left\{ \left\{ y[x] \rightarrow e^{\frac{x^2}{2}} C[1] \right\} \right\}$$

6.1.8 Ecuația (6.6) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

sau forma simetrică

$$f(x)g(y)dx - dy = 0.$$

Forma diferențială $f(x)g(y)dx - dy$ nu este diferențiala totală a unei funcții.

Inmulțind ecuația anterioară cu *factorul integrant* $\frac{1}{g(y)}$ se obține ecuația

$$f(x)dx - \frac{1}{g(y)}dy = 0 \quad (6.8)$$

al cărei membru stâng este o diferențială totală deoarece

$$\frac{\partial}{\partial y}(f(x)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{g(y)}\right).$$

Ecuația (6.8) se poate scrie sub forma

$$dF = 0$$

unde

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)}dt.$$

Rezultă că relația $F(x, y) = C$, adică

$$\int_{x_0}^x f(u)du - \int_{y_0}^y \frac{1}{g(v)}dv = C$$

definește implicit o soluție a ecuației (6.6) dacă alegem y_0 astfel încât $g(y_0) \neq 0$.

6.1.9 Propoziție. Ecuația omogenă

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se reduce la o ecuație cu variabile separabile dacă se utilizează schimbarea de variabilă $y(x) = xz(x)$, unde $z(x)$ este noua funcție necunoscută.

Demonstrație. Derivând $y(x) = xz(x)$ obținem relația $y'(x) = z(x) + xz'(x)$ care ne permite să scriem ecuația sub forma

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z).$$

6.1.10 Propoziție. Ecuația liniară omogenă

$$y' = f(x) y$$

are soluția generală

$$y(x) = C e^{\int_{x_0}^x f(t) dt}$$

unde C este o constantă arbitrară.

Demonstrație. Rezolvarea ecuației poate fi prezentată după cum urmează

$$\frac{dy}{dx} = f(x) y$$

$$\frac{dy}{y} = f(x) dx$$

$$\int_{y_0}^y \frac{du}{u} = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

$$\ln |y| - \ln |y_0| = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x f(t) dt}.$$

6.1.11 Exercițiu. Să se rezolve ecuația

$$y' = x^2 y.$$

Rezolvare. Soluția generală a ecuației este

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x t^2 dt} \quad \text{adică} \quad y(x) = C_1 e^{\frac{x^3}{3}}.$$

6.1.12 MATHEMATICA: DSolve[eqns, y[x], x]

$$\text{In}[1] := \text{DSolve}[y'[x] == f[x] y[x], y[x], x] \mapsto \text{Out}[1] = \left\{ \left\{ y[x] \rightarrow e^{\int_1^x f[K[1] dK[1]} C[1] \right\} \right\}$$

$$\text{In}[2] := \text{DSolve}[y'[x] == x^2 y[x], y[x], x] \mapsto \text{Out}[2] = \left\{ \left\{ y[x] \rightarrow e^{\frac{x^3}{3}} C[1] \right\} \right\}$$

6.1.13 Propoziție. Soluția generală a ecuației liniare neomogene

$$y' = f(x) y + g(x) \tag{6.9}$$

se obține adunând soluția generală a ecuației liniare omogene asociate

$$y' = f(x) y \tag{6.10}$$

cu o soluție particulară $\tilde{y}$ a ecuației (6.9).

Demonstrație. Dacă y verifică (6.10) și $\tilde{y}$ verifică (6.9) atunci

$$(y + \tilde{y})'(x) = f(x)y(x) + f(x)y(x) + g(x) = f(x)(y + \tilde{y})(x) + g(x).$$

Dacă y și $\tilde{y}$ verifică (6.9) atunci $y - \tilde{y}$ verifică (6.10)

$$(y - \tilde{y})'(x) = f(x)y(x) + g(x) - f(x)\tilde{y}(x) - g(x) = f(x)(y - \tilde{y})(x).$$

6.1.14 Propoziție. *O soluție particulară $\tilde{y}$ a ecuației liniare neomogene*

$$y' = f(x)y + g(x)$$

poate fi găsită folosind metoda variației constantei, căutând-o de forma

$$\tilde{y}(x) = C(x) e^{\int_{x_0}^x f(t) dt}.$$

Demonstrație. Înlocuind în ecuație obținem relația

$$C'(x) = g(x) e^{-\int_{x_0}^x f(t) dt}$$

care permite determinarea funcției $C(x)$.

6.1.15 Exercițiu. Să se rezolve ecuația

$$y' = y + x.$$

6.1.16 MATHEMATICA: DSolve[eqns, y[x], x]

In[1]:=DSolve[y'[x]==y[x]+x, y, x] $\mapsto$ Out[1]={ {y[x] $\rightarrow$ -1-x-e^xC[1]} }

6.1.17 Propoziție. *Schimbarea de variabilă $z = y^{1-\alpha}$ permite reducerea ecuației*

$$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha$$

numită ecuația Bernoulli, la o ecuație liniară.

Demonstrație. Dacă $\alpha = 1$ atunci ecuația este deja o ecuație liniară. În cazul $\alpha \neq 1$, împărțind cu y^α obținem ecuația

$$y^{-\alpha}y' = f(x)y^{1-\alpha} + g(x)$$

care se poate scrie

$$\frac{1}{1-\alpha}(y^{1-\alpha})' = f(x)y^{1-\alpha} + g(x).$$

6.1.18 Propoziție. Ecuația Riccati

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$$

se poate rezolva utilizând schimbarea de variabilă

$$y = y_p + \frac{1}{z}$$

în cazul în care se cunoaște o soluție particulară y_p .

Demonstrație. În urma schimbării de variabilă indicate ecuația devine

$$z' = -(2f(x)y_p(x) - g(x))z - f(x)$$

adică o ecuație liniară.

6.2 Ecuații diferențiale liniare de ordin superior

6.2.1 Definiție. O ecuație diferențială liniară de ordinul n este o ecuație de forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (6.11)$$

unde

$$a_0, a_1, \dots, a_n, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt funcții continue definite pe un interval I și $a_0(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in I$.

Prin *soluție* a ecuației (6.11) se înțelege o funcție

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât:

- 1) φ admite derivate continue până la ordinul n
- 2) $a_0(x)\varphi^{(n)}(x) + a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)\varphi(x) = f(x), \quad \forall x \in (a, b).$

6.2.2 Teoremă (de existență și unicitate). *Dacă*

$$a_0, a_1, \dots, a_n, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt funcții continue și

$$a_0(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$$

atunci ecuația diferențială

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

admite pentru fiecare $(x_0, y_{00}, y_{01}, \dots, y_{0n-1}) \in I \times \mathbb{R}^n$ o unică soluție

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât

$$\varphi(x_0) = y_{00}, \quad \varphi'(x_0) = y_{01}, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}.$$

6.2.3 Utilizând operatorul diferențial

$$L = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)$$

unde

$$D = \frac{d}{dx}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \dots, \quad D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

ecuația (6.11) se scrie

$$Ly = f.$$

Operatorul linar

$$L : C^n(I) \longrightarrow C^0(I)$$

unde

$$C^n(I) = \{ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ admite derivate continue până la ordinul } n \}$$

$$C^0(I) = \{ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ este funcție continuă} \}$$

este un operator liniar

$$L(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha L\varphi + \beta L\psi \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall \varphi, \psi \in C^n(I).$$

6.2.4 Teoremă. Spațiul

$$\mathcal{V} = \{ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid L\varphi = 0 \}$$

al tuturor soluțiilor ecuației liniare omogene

$$Ly = 0$$

este un spațiu vectorial de dimensiune n .

Demonstrație. Dacă $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$ atunci

$$L(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha L\varphi + \beta L\psi = 0$$

oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Conform teoremei de existență și unicitate, pentru $x_0 \in I$ fixat aplicația

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad A\varphi = (\varphi(x_0), \varphi'(x_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0))$$

este un izomorfism liniar. Rezultă că spațiile vectoriale $\mathcal{V}$ și $\mathbb{R}^n$ sunt izomorfe și prin urmare $\dim \mathcal{V} = \dim \mathbb{R}^n = n$.

6.2.5 Rezolvarea ecuației

$$Ly = 0$$

înseamnă determinarea spațiului vectorial $\mathcal{V} = \{ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid L\varphi = 0 \}$ al tuturor soluțiilor, ceea ce se poate realiza indicând o bază $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, caz în care

$$\mathcal{V} = \{ c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \mid c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R} \}.$$

Funcțiile

$$y_1, y_2, \dots, y_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

din $\mathcal{V}$ formează o bază a lui $\mathcal{V}$ dacă sunt liniar independente, adică dacă

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

6.2.6 Propoziție. Funcțiile

$$y_1, y_2, \dots, y_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

din $\mathcal{V}$ sunt liniar independente dacă și numai dacă într-un punct fixat $x_0 \in I$ avem

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6.12)$$

Demonstrație. Deoarece

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad A\varphi = (\varphi(x_0), \varphi'(x_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0))$$

este un izomorfism liniar funcțiile $y_1, y_2, \dots, y_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt liniar independente dacă și numai dacă vectorii corespunzători

$$Ay_1 = (y_1(x_0), y_1'(x_0), \dots, y_1^{(n-1)}(x_0))$$

$$Ay_2 = (y_2(x_0), y_2'(x_0), \dots, y_2^{(n-1)}(x_0))$$

.....

$$Ay_n = (y_n(x_0), y_n'(x_0), \dots, y_n^{(n-1)}(x_0))$$

sunt liniar independenți, ceea ce este echivalent cu (6.12).

6.2.7 Teoremă(Abel-Liouville). *Dacă*

$$y_1, y_2, \dots, y_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt n soluții ale ecuației

$$Ly = 0$$

atunci funcția (numită wronskian)

$$W : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

verifică relația

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt} \quad (6.13)$$

unde $x_0 \in I$ este un punct fixat.

Demonstrație (cazul $n = 2$.) Arătăm că W verifică ecuația liniară

$$W'(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} W(x).$$

În cazul $n = 2$ ecuația $Ly = 0$, adică

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2 y = 0$$

conduce la

$$y'' = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} y' - \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y$$

și

$$\begin{aligned} W'(x) &= \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} W(x). \end{aligned}$$

6.2.8 Din relația (6.13) rezultă că dacă W se anulează într-un punct din I atunci se anulează în toate punctele.

6.2.9 Propoziție. *Soluția generală a ecuației liniare neomogene*

$$Ly = f$$

se obține adunând la soluția generală a ecuației omogene asociate

$$Ly = 0$$

o soluție particulară $\tilde{y}$ a ecuației neomogene.

Demonstrație. Deoarece $L\tilde{y} = f$ obținem

$$Ly = 0 \implies L(y + \tilde{y}) = f \quad \text{și} \quad Ly = f \implies L(y - \tilde{y}) = 0.$$

6.2.10 Teoremă (Metoda variației constantelor). *Dacă*

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x)$$

este soluția generală a ecuației omogene

$$Ly = 0$$

atunci o soluție particulară a ecuației neomogene

$$Ly = f$$

poate fi găsită căutând-o de forma

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k(x)$$

cu $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ soluție a sistemului

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n c'_k(x) y_k(x) = 0 \\ \sum_{k=1}^n c'_k(x) y'_k(x) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^n c'_k(x) y_k^{(n-2)}(x) = 0 \\ \sum_{k=1}^n c'_k(x) y_k^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases} \quad (6.14)$$

Demonstrație. Ținând seama de (6.14) obținem relațiile

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k(x)$$

$$\tilde{y}'(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y'_k(x)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\tilde{y}^{(n-1)}(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k^{(n-1)}(x)$$

$$\tilde{y}^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k^{(n)}(x) + \frac{f(x)}{a_0(x)}.$$

care conduc la

$$\begin{aligned} L\tilde{y} &= a_0(x)\tilde{y}^{(n)} + a_1(x)\tilde{y}^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\tilde{y}' + a_n(x)\tilde{y} \\ &= \sum_{k=1}^n c_k(x) \left(a_0(x)y_k^{(n)} + a_1(x)y_k^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y_k' + a_n(x)y_k \right) + f(x) = f(x). \end{aligned}$$

6.2.11 Definiție. Prin *ecuație diferențială liniară de ordinul n cu coeficienți constanți* se înțelege o ecuație de forma

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (6.15)$$

unde $a_0, a_1, \dots, a_n$ sunt numere reale și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă definită pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$.

6.2.12 Ecuația (6.15) este un caz particular pentru ecuația (6.11) și anume cel în care funcțiile $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ sunt funcții constante. Ecuația (6.15) se poate scrie sub forma

$$P(D)y = f$$

unde P este polinomul

$$P(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n$$

numit *polinomul caracteristic* asociat ecuației considerate.

6.2.13 Folosind notația lui Euler

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

definim pentru fiecare număr complex $r = \alpha + i\beta$ funcția complexă

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto e^{rx} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

cu proprietățile

$$D e^{(\alpha+i\beta)x} = (\alpha + i\beta) e^{(\alpha+i\beta)x}$$

$$\Re(D e^{rx}) = D(\Re e^{rx})$$

$$\Im(D e^{rx}) = D(\Im e^{rx})$$

unde $\Re z$ și $\Im z$ reprezintă partea reală și respectiv imaginară a numărului z .

6.2.14 Propoziție. *Funcția*

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad y(x) = e^{rx}$$

este soluție a ecuației omogene

$$P(D)y = 0$$

dacă și numai dacă r este rădăcină a polinomului caracteristic, adică

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Demonstrație. Deoarece $D^k e^{rx} = r^k e^{rx}$ și

$$P(D) e^{rx} = (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n) e^{rx}$$

avem

$$P(D) e^{rx} = 0 \iff P(r) = 0.$$

6.2.15 Propoziție. Dacă polinomul caracteristic $P(r)$ are rădăcinile $r_1, r_2, \dots, r_k$ cu multiplicitățile $m_1, m_2, \dots, m_k$, adică

$$P(r) = a_0 (r - r_1)^{m_1} (r - r_2)^{m_2} \cdots (r - r_k)^{m_k}$$

atunci $P(D)$ admite factorizarea

$$P(D) = a_0 (D - r_1)^{m_1} (D - r_2)^{m_2} \cdots (D - r_k)^{m_k}$$

ordinea factorilor putând fi schimbată fără a afecta rezultatul.

Demonstrație. Afirmatia rezultă din liniaritatea lui D și din relația $D^p D^q = D^{p+q}$.

6.2.16 Propoziție. Dacă $Q(r)$ este un polinom și $\varphi(x)$ este o funcție atunci

$$Q(D) (e^{rx} \varphi) = e^{rx} Q(D + r) \varphi$$

oricare ar fi $r \in \mathbb{C}$.

Demonstrație. Arătăm mai întâi prin inducție că

$$D^k (e^{rx} \varphi) = e^{rx} (D + r)^k \varphi.$$

Avem

$$D (e^{rx} \varphi) = e^{rx} D \varphi + r e^{rx} \varphi = e^{rx} (D + r) \varphi.$$

Presupunând că $D^k (e^{rx} \varphi) = e^{rx} (D + r)^k \varphi$ obținem

$$D^{k+1} (e^{rx} \varphi) = D (e^{rx} (D + r)^k \varphi) = e^{rx} (D + r) (D + r)^k \varphi = e^{rx} (D + r)^{k+1} \varphi.$$

Dacă $Q(r) = \alpha_0 r^m + \alpha_1 r^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1} r + \alpha_m$ atunci

$$\begin{aligned}
Q(D)(e^{rx}\varphi) &= \alpha_0 D^m(e^{rx}\varphi) + \alpha_1 D^{m-1}(e^{rx}\varphi) + \cdots + \alpha_{m-1} D(e^{rx}\varphi) + \alpha_m e^{rx}\varphi \\
&= e^{rx} [\alpha_0 (D+r)^m + \alpha_1 (D+r)^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1} (D+r) + \alpha_m] \varphi \\
&= e^{rx} Q(D+r)\varphi.
\end{aligned}$$

6.2.17 Propoziție. *Soluția generală a ecuației*

$$(D-r)^k y = 0$$

este

$$y(x) = c_0 e^{rx} + c_1 x e^{rx} + \cdots + c_{k-1} x^{k-1} e^{rx}.$$

Demonstrație. Conform propoziției anterioare avem relația

$$D^k(e^{-rx}y) = e^{-rx}(D-r)^k y$$

care arată că ecuația $(D-r)^k y = 0$ este echivalentă cu ecuația

$$D^k(e^{-rx}y) = 0$$

care implică

$$e^{-rx}y(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{k-1} x^{k-1}$$

adică

$$y(x) = c_0 e^{rx} + c_1 x e^{rx} + \cdots + c_{k-1} x^{k-1} e^{rx}.$$

6.2.18 Propoziție. *Fie ecuația diferențială liniară omogenă cu coeficienți reali*

$$P(D)y = 0$$

unde $P(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n$ este polinomul caracteristic.

a) Dacă r_j este rădăcină reală a lui P cu multiplicitatea m_j atunci funcțiile

$$e^{r_j x}, \quad x e^{r_j x}, \quad \dots, \quad x^{m_j-1} e^{r_j x}$$

sunt soluții particulare ale ecuației $P(D)y = 0$.

b) Dacă $r_j = \alpha_j + i\beta_j$ este rădăcină complexă a lui P cu multiplicitatea m_j atunci

$$e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), \quad x e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), \quad \dots, \quad x^{m_j-1} e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x),$$

$$e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x), \quad x e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x), \quad \dots, \quad x^{m_j-1} e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x)$$

sunt soluții particulare ale ecuației $P(D)y = 0$.

Demonstrație. Ecuația $P(D)y = 0$ admite o factorizare de forma

$$Q(D) (D - r_j)^{m_j} y = 0$$

și $(D - r_j)^{m_j} y = 0$ implică $P(D)y = 0$. Deoarece ec. $P(D)y = 0$ are coeficienți reali

$$P(D)y = 0 \implies \begin{cases} P(D)(\Re y) = \Re (P(D)y) = 0 \\ P(D)(\Im y) = \Im (P(D)y) = 0 \end{cases}$$

adică în cazul în care r_j este rădăcină complexă cu multiplicitatea m_j funcțiile

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = \Re \left(c_0 e^{r_j x} + c_1 x e^{r_j x} + \cdots + c_{m_j-1} x^{m_j-1} e^{r_j x} \right)$$

și

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = \Im \left(c_0 e^{r_j x} + c_1 x e^{r_j x} + \cdots + c_{m_j-1} x^{m_j-1} e^{r_j x} \right)$$

sunt soluții ale ecuației $P(D)y = 0$ oricare ar fi constantele reale $c_0, c_1, \dots, c_{m_j-1}$.

6.2.19 Se poate demonstra că, în toate cazurile, în spațiul soluțiilor există o bază formată din soluții particulare de tipul celor prezentate în propoziția anterioară.

6.2.20 Exercițiu. Să se determine soluția generală a ecuațiilor

$$a) \quad y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$b) \quad y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$$

$$c) \quad y'' + y' + y = 0$$

$$d) \quad (D^2 - D + 1)^3 y = 0$$

$$e) \quad (D - 3)^4 (D^2 + 2)^2 y = 0.$$

Răspuns.

$$a) \quad y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

$$b) \quad y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x}$$

$$c) \quad y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$d) \quad y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ + c_3 x e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_4 x e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ + c_5 x^2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_6 x^2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$e) \quad y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + c_3 x^2 e^{3x} + c_4 x^3 e^{3x} \\ + c_5 \cos(\sqrt{2}x) + c_6 \sin(\sqrt{2}x) + c_7 x \cos(\sqrt{2}x) + c_8 x \sin(\sqrt{2}x).$$

6.2.21 MATHEMATICA: DSolve[eqns, y[x], x]

In[1]:=DSolve[y''[x] - 5 y'[x] + 6 y[x] == 0, y[x], x]

→ Out[1]={ {y[x]→e^{2x} C[1]+e^{3x} C[2]} }

In[2]:=DSolve[y'''[x] - 6 y''[x] + 12 y'[x] - 8 y[x] == 0, y[x], x]

→ Out[2]={ {y[x]→e^{2x} C[1]+e^{2x} x C[2]+e^{2x} x² C[3]} }

In[3]:=DSolve[y''[x] + y'[x] + y[x] == 0, y[x], x]

→ Out[3]={ {y[x]→e^{-x/2} C[2] Cos[$\frac{\sqrt{3}x}{2}$]+e^{-x/2} C[1] Sin[$\frac{\sqrt{3}x}{2}$]} }

6.2.22 Propoziție. Ecuația Euler

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

se reduce la o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți prin schimbarea de variabilă $x = e^t$, unde t este noua variabilă independentă.

Demonstrație (cazul $n = 3$). Notând cu $z(t)$ noua funcție necunoscută avem relația

$$y(x) = z(\ln x)$$

care prin derivări succesive conduce la

$$y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln x) = e^{-t} z'(t)$$

$$y''(x) = \frac{1}{x^2} z''(\ln x) - \frac{1}{x^2} z'(\ln x) = e^{-2t} (z''(t) - z'(t))$$

$$y'''(x) = \frac{1}{x^3} z'''(\ln x) - \frac{3}{x^3} z''(\ln x) + \frac{2}{x^3} z'(\ln x) = e^{-3t} (z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t))$$

În urma schimbării de variabilă, ecuația Euler

$$a_0 x^3 y''' + a_1 x^2 y'' + a_2 x y' + a_3 y = 0$$

devine

$$a_0 z''' + (-3a_0 + a_1)z'' + (2a_0 - a_1 + a_2)z' + a_3 z = 0.$$

6.2.23 Relația $x = e^t$, echivalentă cu $t = \ln x$, conduce la

$$\frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} = \frac{1}{x} \frac{d}{dt} = e^{-t} \frac{d}{dt}.$$

Ecuația Euler se poate scrie

$$\left(a_0 x^n \frac{d^n}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} x \frac{d}{dx} + a_n \right) y = 0$$

și formal, schimbarea de variabilă $x = e^t$ în ecuația Euler se poate realiza înlocuind x cu e^t și operatorul de derivare $\frac{d}{dx}$ cu $e^{-t} \frac{d}{dt}$. De remarcat că

$$\left(e^{-t} \frac{d}{dt} \right)^2 = e^{-t} \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{d}{dt} \right) = e^{-2t} \frac{d^2}{dt^2} - e^{-2t} \frac{d}{dt}.$$

$$Y' = A(x)Y + F(x) \quad \S i \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

6.3.4 Teoremă. *Spațiul $\mathcal{V}$ al tuturor soluțiilor sistemului diferențial liniar omogen*

$$Y' = A(x)Y$$

este un spațiu vectorial de dimensiune n .

Demonstrație. Pentru $x_0 \in I$ fixat, din teorema de existență și unicitate rezultă că aplicația liniară

$$\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n : Y \mapsto Y(x_0)$$

este un izomorfism liniar.

6.3.5 Rezolvarea sistemului omogen $Y' = AY$ este echivalentă cu găsirea unei baze al lui $\mathcal{V}$, adică cu găsirea a n soluții liniar independente.

6.3.6 Definiție. Plecând de la n soluții ale sistemului omogen $Y' = A(x)Y$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$$

construim *matricea Wronski*

$$W = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

și *wronskianul*

$$w = \det W.$$

6.3.7 Teoremă. *Soluțiile $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ formează o bază a spațiului vectorial $\mathcal{V}$ dacă și numai dacă wronskianul lor este nenul într-un punct fixat $x_0 \in I$, adică*

$$w(x_0) \neq 0.$$

Demonstrație. Deoarece

$$\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n : Y \mapsto Y(x_0)$$

este un izomorfism liniar, soluțiile $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sunt liniar independente dacă și numai dacă vectorii $Y_1(x_0), Y_2(x_0), \dots, Y_n(x_0)$ din $\mathbb{R}^n$ sunt liniar independenți, ceea ce este echivalent cu $w(x_0) \neq 0$.

6.3.8 Teoremă. Wronskianul soluțiilor $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ verifică relația

$$w(x) = w(x_0) e^{\int_{x_0}^x \text{tr } A(t) dt} \quad (6.17)$$

unde $\text{tr } A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \dots + a_{nn}(t)$ este urma matricei $A(t)$.

Demonstrație (cazul $n = 2$.) Avem

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y'_{11}(x) & y_{12}(x) \\ y'_{21}(x) & y_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y'_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y'_{22}(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}(x)y_{11}(x) + a_{12}(x)y_{21}(x) & y_{12}(x) \\ a_{21}(x)y_{11}(x) + a_{22}(x)y_{21}(x) & y_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11}(x) & a_{11}(x)y_{12}(x) + a_{12}(x)y_{22}(x) \\ y_{21}(x) & a_{21}(x)y_{12}(x) + a_{22}(x)y_{22}(x) \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}(x) + a_{22}(x)) w(x) \end{aligned}$$

adică w verifică ecuația diferențială liniară

$$w' = \text{tr } A(x) w.$$

6.3.9 Din relația (6.13) rezultă că dacă wronskianul se anulează într-un punct $x_0 \in I$ atunci el se anulează în toate punctele $x \in I$.

6.3.10 Propoziție. Soluția generală a sistemului liniar neomogen

$$Y' = A(x)Y + F(x)$$

se obține adunând la soluția generală a sistemului liniar omogen asociat

$$Y' = A(x)Y$$

o soluție particulară $\tilde{Y}$ a sistemului neomogen.

Demonstrație. Deoarece $\tilde{Y}' = A(x)Y + F(x)$ obținem

$$Y' = A(x)Y \implies (Y + \tilde{Y})' = A(x)(Y + \tilde{Y}) + F(x)$$

$$Y' = A(x)Y + F(x) \implies (Y - \tilde{Y})' = A(x)(Y - \tilde{Y}).$$

6.3.11 Folosind matricea Wronski W asociată unei baze $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ a lui $\mathcal{V}$, soluția generală

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_n Y_n$$

a ecuației liniare omogene $Y' = A(x)Y$ se poate scrie sub forma

$$Y(x) = W(x) C \quad \text{unde} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

6.3.12 Teoremă (Metoda variației constantelor).

Dacă soluția generală a sistemului

$$Y' = A(x) Y$$

este $Y(x) = W(x) C$ *atunci o soluție particulară sistemului neomogen*

$$Y' = A(x) Y + F(x)$$

se poate obține căutând-o de forma

$$\tilde{Y}(x) = W(x) C(x)$$

unde $C(x)$ *este o soluție a sistemului*

$$C'(x) = W^{-1}(x) F(x).$$

Demonstrație. Deoarece $W' = A(x)W$ și $\tilde{Y}'(x) = W'(x) C(x) + W(x) C'(x)$ avem

$$\tilde{Y}' = A(x) \tilde{Y} + F(x)$$

dacă și numai dacă $W(x) C'(x) = F(x)$.

6.3.13 Definiție. Prin *sistem diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți* se înțelege un sistem de ecuații de forma

$$Y' = AY \quad \text{unde} \quad A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

6.3.14 Propoziție. *Funcția vectorială* $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, $Y(x) = w e^{\lambda x}$, *unde*

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

verifică relația

$$Y' = AY$$

dacă și numai dacă

$$Aw = \lambda w.$$

Demonstrație. Deoarece $Y'(x) = \lambda w e^{\lambda x}$ înlocuind în $Y' = AY$ obținem $Aw = \lambda w$.

6.3.15 Fie λ o rădăcină a polinomului caracteristic

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ atunci λ este valoare proprie a matricei A și alegând un vector propriu corespunzător $w \in \mathbb{R}^n$ obținem soluția netrivială $Y(x) = w e^{\lambda x}$ a sistemului $Y' = AY$. Dacă $\lambda \notin \mathbb{R}$ atunci există $w \in \mathbb{C}^n$ astfel încât $Aw = \lambda w$ și

$$Y_1(x) = \Re(w e^{\lambda x}), \quad Y_2(x) = \Im(w e^{\lambda x})$$

sunt soluții ale sistemului $Y' = AY$.

6.3.16 Exercițiu. Să se determine soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2. \end{cases}$$

Rezolvare. Ecuația

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

are rădăcinile $\lambda_1 = 1 + i$ și $\lambda_2 = 1 - i$. O soluție particulară a ecuației $Av = (1 + i)v$, adică

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (1 + i) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

este $v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Rezultă că soluția generală a sistemului este

$$\begin{aligned} Y(x) &= c_1 \Re \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1+i)x} \right\} + c_2 \Im \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1+i)x} \right\} \\ &= c_1 \Re \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^x (\cos x + i \sin x) \right\} + c_2 \Im \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^x (\cos x + i \sin x) \right\} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} e^x \end{aligned}$$

adică

$$\begin{cases} y_1(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x \\ y_2(x) = -c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x. \end{cases}$$

6.3.17 MATHEMATICA: DSolve[{eqn1, eqn2}, {y1[x], y2[x]}, x]

In[1]:=DSolve[{y1'[x] == y1[x]+y2[x], y2'[x] == -y1[x]+y2[x]}, {y1[x], y2[x]}, x]
 $\mapsto$ Out[1]={ {y1[x] $\rightarrow$ e^x C[1] Cos[x]+e^x C[2] Sin[x], y2[x] $\rightarrow$ e^x C[2] Cos[x]-e^x C[1] Sin[x]} }

6.3.18 Dacă matricea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ este diagonalizabilă și $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ unde

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots \quad v_n = \begin{pmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix}$$

este o bază a lui $\mathbb{R}^n$ formată din vectori proprii ai lui A corespunzători valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (distincte sau nu) atunci soluția generală a sistemului $Y' = AY$ este

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x} + c_2 \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n \begin{pmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix} e^{\lambda_n x}.$$

6.3.19 Exercițiu. Să se determine soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2 \end{cases}$$

Rezolvare. Rezolvând ecuația

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

obținem $\lambda_1 = 2$, și $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Deoarece subspațiile proprii corespunzătoare sunt

$$V_2 = \{ \alpha(1, 1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}, \quad V_{-1} = \{ \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

rezultă că soluția generală a sistemului este

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}.$$

6.3.20 MATHEMATICA: DSolve[{eqn1, eqn2, eqn3}, {y1[x], y2[x], y3[x]}, x]

Soluția generală a sistemului este

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x \\ -2x + 1 \\ x - 1 \end{pmatrix} e^{-3x} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3x}.$$

6.3.23 O altă metodă de rezolvare a sistemelor liniare omogene cu coeficienți constanți, numită *metoda eliminării*, se bazează pe faptul că fiecare dintre funcțiile necunoscute y_j verifică o ecuație diferențială liniară.

6.3.24 Exercițiu. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_1. \end{cases}$$

Rezolvare. Funcția necunoscută y_1 verifică ecuația liniară

$$y_1''' - y_1 = 0.$$

Deoarece $P(r) = r^3 - 1$ are rădăcinile $r_1 = 1$ și $r_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$, rezultă că

$$y_1(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Prin derivarea lui y_1 se obțin y_2 și y_3 .

6.3.25 Deoarece izomorfismul de spații vectoriale

$$\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^{n^2} :$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$$

permite identificarea spațiului vectorial $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ cu $\mathbb{K}^{n^2}$, aplicația

$$\|\cdot\| : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

este o normă pe $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. În particular, o serie de matrice

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$$

este *convergentă* dacă există limita

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m a_k A^k$$

adică dacă există $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ astfel încât

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^m a_k A^k - B \right\| = 0.$$

6.3.26 Propoziție. *Dacă seria de puteri*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

are raza de convergență $R > 0$ și dacă $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ este astfel încât $\|A\| < R$ atunci seria de matrice

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$$

este convergentă.

Demonstrație. Alegând r astfel încât $\|A\| < r < R$ obținem relația

$$\|a_k A^k\| = |a_k| \|A^k\| \leq |a_k| \|A\|^k < |a_k| r^k.$$

Seria $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ fiind absolut convergentă, din criteriul comparației rezultă că seria $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k A^k\|$ este convergentă, ceea ce implică convergența seriei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$.

6.3.27 Deoarece seria exponențială

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

are raza de convergență $r = \infty$ rezultă că pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ putem defini matricea

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = 1 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots$$

numită *exponențiala matricei* A . Se poate arăta că funcția matriceală

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) : t \mapsto e^{tA}$$

este derivabilă și că $(e^{tA})' = A e^{tA}$ adică

$$Y(t) = e^{tA} C$$

este soluție a sistemului liniar $Y' = AY$, oricare ar fi $C \in \mathbb{R}^n$.

6.3.28 MATHEMATICA: Series[Exp[A], {A, 0, n}]

$$\text{In}[1] := \text{Series}[\text{Exp}[A], \{A, 0, 4\}] \mapsto \text{Out}[1] = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \frac{A^4}{24} + 0[A]^5$$

6.3.29 Exercițiu. Să se determine soluția sistemului

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 + y_3 \\ y'_2 = y_1 + y_3 \\ y'_3 = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Rezolvare. Matricea sistemului

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

este diagonalizabilă

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{unde} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece

$$A = S \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} S^{-1}$$

obținem

$$A^k = S \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^k S^{-1} = S \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} S^{-1}$$

și

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} S^{-1}$$

relație care permite scrierea explicită a soluției generale.

6.3.30 MATHEMATICA: Eigenvalues[A], Eigenvectors[A], MatrixForm[MatrixExp[tA]]

$$\text{In}[1] := \text{MatrixForm}[\{\{0, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 1, 0\}\}] \mapsto \text{Out}[1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{In}[2] := \text{Eigenvalues}[\{\{0, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 1, 0\}\}] \mapsto \text{Out}[2] = \{2, -1, -1\}$$

$$\text{In}[3] := \text{Eigenvectors}[\{\{0, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 1, 0\}\}] \mapsto \text{Out}[3] = \{\{1, 1, 1\}, \{-1, 0, 1\}, \{-1, 1, 0\}\}$$

$$\text{In}[4] := \text{MatrixForm}[\text{MatrixExp}[t \{\{0, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 1, 0\}\}]]$$

$$\mapsto \text{Out}[4] = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t}(2 + e^{3t}) & \frac{1}{3}e^{-t}(-1 + e^{3t}) & \frac{1}{3}e^{-t}(-1 + e^{3t}) \\ \frac{1}{3}e^{-t}(-1 + e^{3t}) & \frac{1}{3}e^{-t}(2 + e^{3t}) & \frac{1}{3}e^{-t}(-1 + e^{3t}) \\ \frac{1}{3}e^{-t}(-1 + e^{3t}) & \frac{1}{3}e^{-t}(-1 + e^{3t}) & \frac{1}{3}e^{-t}(2 + e^{3t}) \end{pmatrix}$$

Capitolul 7

Polinoame ortogonale și funcții speciale asociate

7.1 Polinoame Legendre

7.1.1 Teoremă (Metoda de ortogonalizare Gram-Schmidt). *Dacă $\{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ este un sistem liniar independent (finit sau infinit) atunci $\{w_1, w_2, w_3, \dots\}$, unde*

$$\begin{aligned}w_1 &= v_1 \\w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 \\w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 \\&\dots\dots\dots\end{aligned}$$

este un sistem ortogonal astfel încât spațiul vectorial generat de $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ este același cu spațiul vectorial generat de $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

7.1.2 Definiție. Polinoamele $P_0, P_1, P_2 \dots$ satisfăcând condiția

$$P_n(1) = 1$$

obținute ortogonalizând șirul $1, x, x^2, \dots$ în raport cu produsul scalar

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{-1}^1 \varphi(x) \psi(x) dx$$

se numesc *polinoame Legendre*.

7.1.3 Exercițiu. Să se arate că P_n este polinom de gradul n .

Rezolvare. Pentru orice n , spațiul vectorial generat de $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ este același cu spațiul vectorial generat de $1, x, x^2, \dots, x^n$. Acest lucru este posibil numai dacă P_n este polinom de gradul n .

7.1.4 Exercițiu. Să se determine polinoamele Legendre P_0, P_1 și P_2 .

Rezolvare. Ortogonalizând $1, x, x^2$ rezultă polinoamele

$$Q_0(x) = 1$$

$$Q_1(x) = x - \frac{\langle x, Q_0 \rangle}{\langle Q_0, Q_0 \rangle} Q_0(x) = x$$

$$Q_2(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, Q_0 \rangle}{\langle Q_0, Q_0 \rangle} Q_0(x) - \frac{\langle x^2, Q_1 \rangle}{\langle Q_1, Q_1 \rangle} Q_1(x) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Obținem polinoamele P_0, P_1, P_2 căutându-le de forma $P_n = \alpha_n Q_n$ cu constantele α_n determinate astfel încât $P_n(1) = 1$. Rezultă $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$ și $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

7.1.5 MATHEMATICA: LegendreP[n, x]

In[1]:=LegendreP[0, x] $\mapsto$ Out[1]=1

In[2]:=LegendreP[1, x] $\mapsto$ Out[2]=x

In[3]:=LegendreP[2, x] $\mapsto$ Out[3]= $\frac{1}{2}(-1+3x^2)$

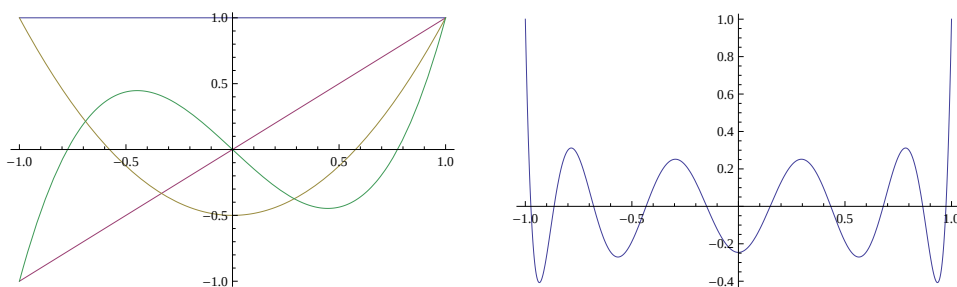


Figura 7.1: Funcțiile P_0, P_1, P_2, P_3 și funcția P_{10} .

7.1.6 Exercițiu. Să se scrie x^2+x+1 ca o combinație liniară de polinoame Legendre.

Indicație. Se determină α_0, α_1 , și α_2 astfel încât

$$x^2 + x + 1 = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2.$$

7.1.7 Exercițiu. Să se arate că toate rădăcinile polinomului P_n sunt simple și aparțin intervalului $(-1, 1)$.

Rezolvare. Polinomul P_n de gradul n are cel mult n rădăcini. Fiind funcție continuă P_n își poate schimba semnul doar în puncte x_j care sunt rădăcini ale polinomului. Presupunem că punctele în care P_n își schimbă semnul sunt $x_1, x_2, \dots, x_k$ și considerăm polinomul de grad $k \leq n$

$$p_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } k = 0 \\ (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_k) & \text{dacă } 0 < k \leq n. \end{cases}$$

Deoarece funcția $P_n(x)p_k(x)$ nu își schimbă semnul în intervalul $(-1, 1)$, rezultă că

$$\int_{-1}^1 P_n(x)p_k(x) dx \neq 0.$$

Acest lucru este posibil numai dacă $k = n$.

7.1.8 Teoremă (Rodrigues). Polinomul Legendre P_n verifică relația

$$P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (7.1)$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Avem $\frac{1}{0! 2^0} [(x^2 - 1)^0]^{(0)} = 1 = P_0(x)$. Fie $n > 0$ fixat și fie $\tilde{P}_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} [(x^2 - 1)^n]^{(n)}$. Deoarece $\tilde{P}_n$ este un polinom de gradul n rezultă că există $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\tilde{P}_n = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n.$$

Avem

$$\langle 1, \tilde{P}_n \rangle = \frac{1}{n! 2^n} \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^n]^{(n)} dx = \frac{1}{n! 2^n} [(x^2 - 1)^n]^{(n-1)} \Big|_{-1}^1 = 0.$$

Dacă $n > 1$, integrând prin părți obținem

$$\begin{aligned} \langle x, \tilde{P}_n \rangle &= \frac{1}{n! 2^n} \int_{-1}^1 x [(x^2 - 1)^n]^{(n)} dx \\ &= \frac{1}{n! 2^n} x [(x^2 - 1)^n]^{(n-1)} \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{n! 2^n} \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^n]^{(n-1)} dx = 0 \end{aligned}$$

și în general,

$$\langle x^k, \tilde{P}_n \rangle = 0 \quad \text{oricare ar fi } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Din relația precedentă rezultă

$$\langle P_k, \tilde{P}_n \rangle = 0 \quad \text{oricare ar fi } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Tinând seama de ortogonalitatea polinoamelor Legendre obținem relația

$$0 = \langle P_k, \tilde{P}_n \rangle = \langle P_k, \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n \rangle = \alpha_k \langle P_k, P_k \rangle$$

din care rezultă

$$\alpha_k = 0, \quad \text{oricare ar fi } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

și deci $\tilde{P}_n = \alpha_n P_n$. Deoarece $P_n(1) = 1$ și

$$\tilde{P}_n(1) = \frac{1}{n! 2^n} \left[\sum_{j=0}^n C_n^j [(x-1)^n]^{(j)} [(x+1)^n]^{(n-j)} \right]_{x=1} = 1$$

rezultă că $\alpha_n = 1$ și deci $\tilde{P}_n = P_n$.

7.1.9 Relația (7.1) poate fi utilizată ca definiție pentru polinoamele Legendre.

7.1.10 Exercițiu. Să se determine P_0 , P_1 și P_2 folosind formula lui Rodrigues.

Rezolvare. Avem

$$P_0(x) = \frac{1}{0! 2^0} \frac{d^0}{dx^0} (x^2 - 1)^0 = 1$$

$$P_1(x) = \frac{1}{1! 2^1} \frac{d^1}{dx^1} (x^2 - 1)^1 = \frac{1}{2} 2x = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2! 2^2} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{8} (x^4 - 2x^2 + 1)'' = \frac{1}{8} (4x^3 - 4x)' = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

7.1.11 Propoziție. Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, ecuația (ecuația polinoamelor Legendre)

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

admite o soluție polinomială dar nu admite soluții polinomiale liniar independente.

Demonstrație. Din teoria generală a ecuațiilor diferențiale știm că spațiul soluțiilor ecuației considerate este un spațiu vectorial de dimensiune 2. Dacă ecuația ar admite două soluții polinomiale liniar independente atunci ele ar forma o bază în spațiul soluțiilor și prin urmare toate soluțiile ar fi polinomiale. Căutând soluții dezvoltabile în serie de puteri

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

arătăm că ecuația admite atât soluții polinomiale cât și nepolinomiale. Deoarece în domeniul de convergență

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1}, \quad y''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2}$$

înlocuind în ecuație obținem relația

$$[2c_2 + n(n+1)c_0] + [3 \cdot 2c_3 + (n-1)(n+2)c_1]x + \dots$$

$$+[(m+2)(m+1)c_{m+2} + (n-m)(m+n+1)c_m]x^m + \dots = 0$$

din care rezultă

$$(m+2)(m+1)c_{m+2} + (n-m)(m+n+1)c_m = 0, \quad \text{oricare ar fi } m \in \mathbb{N}.$$

Alegând $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ obținem soluția

$$y_0(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \dots$$

iar alegând $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ obținem soluția

$$y_1(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \dots$$

Deoarece

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|c_{m+2}|}{|c_m|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m-n)(m+n+1)}{(m+2)(m+1)} = 1$$

soluțiile y_0 și y_1 sunt convergente pentru $|x^2| < 1$, adică pentru $|x| < 1$. Dacă n este număr par atunci y_0 este soluție polinomială (seria are un număr finit de coeficienți nenuli) iar y_1 este soluție nepolinomială. Dacă n este număr impar atunci y_1 este soluție polinomială și y_0 nepolinomială.

7.1.12 Propoziție. *Soluția polinomială a ecuației*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

care verifică condiția $y(1) = 1$ este polinomul Legendre P_n .

Demonstrație. Fie $u(x) = (x^2 - 1)^n$. Avem

$$u' = 2nx \frac{u}{x^2 - 1}$$

adică

$$(x^2 - 1)u' = 2nx u.$$

Derivând relația anterioară de $(k+1)$ ori folosind formula lui Leibniz

$$(fg)^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j f^{(j)} g^{(k+1-j)}$$

obținem

$$(x^2 - 1)u^{(k+2)} + 2(k+1)x u^{(k+1)} + 2 \frac{(k+1)k}{2} u^{(k)} = 2nx u^{(k+1)} + 2(k+1)nx u^{(k)}.$$

Inmulțind cu $\frac{1}{n!2^n}$ relația obținută și înlocuind k cu n rezultă

$$(1-x^2)(u^{(n)})'' - 2x(u^{(n)})' + n(n+1)u^{(n)} = 0$$

adică

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0.$$

7.1.13 Exercițiu. Să se determine P_2 folosind propoziția anterioară.

Indicație. Polinomul P_2 , de forma $P_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, este soluția ecuației

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$$

care verifică condiția $y(1) = 1$.

7.1.14 Se știe că pentru $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ are loc relația

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \quad \text{unde} \quad C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

7.1.15 Propoziție (Seria binomială).

Dezvoltând în serie Taylor în jurul lui 0 funcția

$$f: (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$$

obținem pentru orice număr real α și orice $x \in (-1, 1)$ relația

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Demonstrație. Deoarece

$$f^{(n)}(x) = [(1+x)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

seria Taylor corespunzătoare lui f

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

este seria de puteri

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

cu raza de convergență

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - n + 1|}{n} = 1.$$

7.1.16 Teoremă (Funcția generatoare).

Pentru $x \in (-1, 1)$ și t într-o vecinătate suficient de mică a lui 0 avem

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n.$$

Demonstrație. Fie $x \in (-1, 1)$ și γ_x un drum închis care se rotește o dată în jurul lui x în sens direct (a se vedea Figura 7.2).

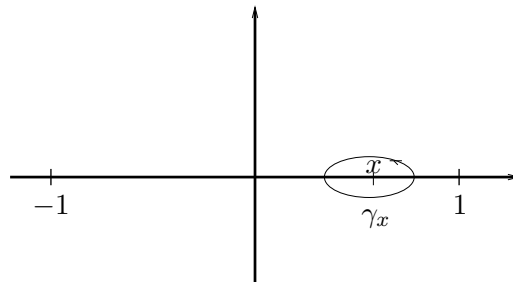


Figura 7.2: Drumul γ_x .

Utilizând formula lui Cauchy obținem

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n! 2^n} [(x^2 - 1)^n]^{(n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n! 2^n} \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_x} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_x} \left[\frac{(z^2 - 1)t}{2(z - x)} \right]^n \frac{1}{z - x} dz. \end{aligned}$$

Pentru t într-o vecinătate a lui 0 aleasă astfel încât $\left| \frac{(z^2 - 1)t}{2(z - x)} \right| < 1$ avem

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_x} \frac{1}{z - x} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(z^2 - 1)t}{2(z - x)} \right]^n dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_x} \frac{1}{z - x} \frac{1}{1 - \frac{(z^2 - 1)t}{2(z - x)}} dz \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_x} \frac{dz}{-tz^2 + 2z + t - 2x} \end{aligned}$$

Punctele singulare ale funcției f de sub integrală

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2xt + t^2}}{t} \quad \text{și} \quad z_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2xt + t^2}}{t}$$

verifică relațiile $\lim_{t \rightarrow 0} z_1 = x$ și $\lim_{t \rightarrow 0} |z_2| = \infty$. Pentru t într-o vecinătate destul de mică a lui 0 din teorema reziduurilor rezultă

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n &= \frac{1}{\pi i} 2\pi i \operatorname{Rez}_{z_1} f = 2 \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) \\ &= 2 \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{1}{-t(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{-2}{t(z_1 - z_2)} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}. \end{aligned}$$

7.1.17 Exercițiu. Să se determine P_0 , P_1 și P_2 folosind funcția generatoare.

Rezolvare. Utilizând dezvoltarea în serie

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

adevărată pentru $|x| < 1$, obținem relația

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= [1 + (-2xt + t^2)]^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}(-2xt + t^2) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}(-2xt + t^2)^2 + \dots \\ &= 1 + xt + \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)t^2 + \dots \end{aligned}$$

din care, prin identificare, rezultă $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ și $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

7.1.18 Exercițiu. Să se arate că

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

Rezolvare. Relația rezultă din

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2(-x)(-t)+(-t)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x) (-t)^n.$$

7.1.19 Teoremă. Polinoamele Legendre verifică relația de recurență

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (7.2)$$

oricare ar fi $n \geq 1$.

Demonstrație. Derivând în raport cu t relația

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) t^k.$$

obținem relația

$$\frac{-(t-x)}{(1-2xt+t^2)\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k(x) t^{k-1}$$

care se mai poate scrie

$$(x-t) \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) t^k = (1-2xt+t^2) \sum_{k=0}^{\infty} kP_k(x) t^{k-1}.$$

Identificând coeficienții lui t^n din cei doi membri a ultimei identități obținem relația de recurență din enunțul teoremei.

7.1.20 Exercițiu. Să se determine P_2 știind că $P_0(x)=1$ și $P_1(x)=x$.

Rezolvare. În cazul $n=1$ relația de recurență devine

$$2P_2(x) - 3xP_1(x) + P_0(x) = 0.$$

7.1.21 Teoremă (Norma polinoamelor Legendre). *Avem*

$$\langle P_n, P_{n'} \rangle = \frac{2}{2n+1} \delta_{nn'}.$$

Demonstrație. Integrând de n ori prin părți obținem

$$\begin{aligned} \|P_n\|^2 &= \langle P_n, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{1}{n! 2^n} [(x^2 - 1)^n]^{(n)} dx \\ &= \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \int_{-1}^1 P_n^{(n)}(x) (x^2 - 1)^n dx. \end{aligned}$$

Deoarece

$$P_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n! 2^n} [(x^2 - 1)^n]^{(2n)} = \frac{(2n)!}{n! 2^n}$$

avem

$$\|P_n\|^2 = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \frac{(2n)!}{n! 2^n} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n! 2^n)^2} I_n$$

unde

$$I_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx.$$

Utilizând relația de recurență (obținută integrând prin părți)

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)(x^2 - 1)^{n-1} dx \\ &= \frac{1}{2n} \int_{-1}^1 x \cdot [(x^2 - 1)^n]' dx - I_{n-1} = \frac{-1}{2n} I_n - I_{n-1} \end{aligned}$$

care conduce la

$$I_n = -\frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \dots = (-1)^n \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

obținem

$$\|P_n\|^2 = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n! 2^n)^2} I_n = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n! 2^n)^2} (-1)^n \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}.$$

7.1.22 Se poate arăta că șirul de polinoame

$$\left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

este o bază ortonormată în spațiul Hilbert $L^2(-1, 1)$.

7.1.23 MATHEMATICA: Polinoame obținute prin ortonormalizare

`In[1]:=Orthogonalize[{1, x, x^2, x^3}, Integrate[#1 #2, {x, -1, 1}] &]`
 $\mapsto \text{Out}[1]=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(-\frac{1}{3}+x^2\right)\right\}$

7.1.24 Teoremă.

Orice $f \in L^2(-1, 1)$ admite dezvoltarea în serie de polinoame Legendre

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(x) \quad (7.3)$$

cu coeficienții

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx. \quad (7.4)$$

Demonstrație. Din dezvoltarea în serie (7.3) rezultă relația

$$\langle P_k, f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \langle P_k, P_n \rangle = \alpha_k \|P_k\|^2$$

care conduce la

$$\alpha_k = \frac{2k+1}{2} \langle P_k, f \rangle = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx.$$

7.1.25 Exercițiu. Să se dezvolte în serie de polinoame Legendre funcția

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|.$$

Răspuns (a se vedea [16], pag. 283).

$$|x| = \frac{1}{2} P_0(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-2)! (4n+1)}{2^{2n} (n-1)! (n+1)!} P_{2n}(x).$$

7.1.26 Exercițiu. Să se dezvolte în serie de polinoame Legendre funcția

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1-x}.$$

Răspuns (a se vedea [16], pag. 283).

$$\sqrt{1-x} = \frac{2\sqrt{2}}{3} P_0(x) - 2\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} P_n(x).$$

7.1.27 Teoremă (Formula Christoffel-Darboux).

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) P_k(x) P_k(y) = \frac{n+1}{x-y} [P_{n+1}(x) P_n(y) - P_n(x) P_{n+1}(y)].$$

Demonstrație. Înmulțind relația de recurență (7.2) cu $P_k(y)$ obținem

$$(k+1)P_{k+1}(x)P_k(y) - (2n+1)xP_k(x)P_k(y) + kP_{k-1}(x)P_k(y) = 0.$$

Permutând x cu y rezultă

$$(k+1)P_{k+1}(y)P_k(x) - (2k+1)yP_k(y)P_k(x) + kP_{k-1}(y)P_k(x) = 0.$$

Din diferența ultimelor două relații scrisă sub forma

$$\begin{aligned} (k+1)[P_{k+1}(x)P_k(y) - P_{k+1}(y)P_k(x)] - k[P_k(x)P_{k-1}(y) - P_k(y)P_{k-1}(x)] \\ = (2k+1)(x-y)P_k(x)P_k(y) \end{aligned}$$

rezultă

$$\begin{aligned} (x-y) \sum_{k=1}^n (2k+1)P_k(x)P_k(y) = (n+1)[P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)] \\ - [P_1(x)P_0(y) - P_1(y)P_0(x)]. \end{aligned}$$

Deoarece $P_0(x) = 1$ și $P_1(x) = x$, ultima relație se poate scrie sub forma

$$(x-y) \sum_{k=0}^n (2k+1)P_k(x)P_k(y) = (n+1)[P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)].$$

7.2 Funcții Legendre asociate

7.2.1 Definiție. Funcțiile

$$P_l^m : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{(m)}(x)$$

unde $l \in \mathbb{N}$ și $m \in \{0, 1, \dots, l\}$ sunt numite *funcții Legendre asociate*.

7.2.2 Exercițiu. Să se determine P_0^0 , P_1^0 , P_1^1 , P_2^0 , P_2^1 și P_2^2 .

Rezolvare. Deoarece $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ și $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ avem

$$\begin{aligned} P_0^0(x) = 1 & & P_1^0(x) = x & & P_2^0(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\ P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2} & & P_2^1(x) = 3x\sqrt{1-x^2} \\ P_2^2(x) = 3(1-x^2) \end{aligned}$$

7.2.3 MATHEMATICA: LegendreP[1,m x]

$$\begin{aligned} \text{In}[1] := \text{LegendreP}[0, 0, x] & \mapsto \text{Out}[1] = 1 \\ \text{In}[2] := \text{LegendreP}[1, 0, x] & \mapsto \text{Out}[2] = x \\ \text{In}[3] := \text{LegendreP}[1, 1, x] & \mapsto \text{Out}[3] = -\sqrt{1-x^2} \\ \text{In}[4] := \text{LegendreP}[2, 0, x] & \mapsto \text{Out}[4] = \frac{1}{2}(-1+3x^2) \\ \text{In}[5] := \text{LegendreP}[2, 1, x] & \mapsto \text{Out}[5] = -3x\sqrt{1-x^2} \\ \text{In}[6] := \text{LegendreP}[2, 0, x] & \mapsto \text{Out}[6] = -3(-1+x^2) \end{aligned}$$

7.2.4 Teoremă *Ecuatia (numită ecuația funcțiilor Legendre asociate)*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0 \quad (7.5)$$

admite în cazul $\lambda = l(l+1)$ cu $l \in \{m, m+1, \dots\}$ ca soluție funcția P_l^m .

Demonstrație. Funcția

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} z(x)$$

verifică ecuația (7.5) dacă și numai dacă z este soluție a ecuației

$$(1-x^2)z'' - 2(m+1)xz' + [l(l+1) - m(m+1)]z = 0.$$

Polinomul Legendre P_l verifică ecuația

$$(1-x^2)P_l'' - 2xP_l' + l(l+1)P_l = 0.$$

Derivând această relație de m ori obținem relația

$$(1-x^2)(P_l^{(m)})'' - 2(m+1)x(P_l^{(m)})' + [l(l+1) - m(m+1)]P_l^{(m)} = 0.$$

7.2.5 Utilizând formula lui Rodrigues obținem relația

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{(m)}(x) = \frac{1}{l!2^l} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} [(x^2-1)^l]^{(l+m)}$$

care are sens și pentru $m \in \{-l, -l+1, \dots, -1\}$.

Mai mult, se poate arăta că P_l^m verifică ecuația

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

oricare ar fi $l \in \mathbb{N}$ și $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$.

7.2.6 Teoremă (Norma funcțiilor Legendre asociate). *Avem*

$$\|P_l^m\| = \sqrt{\frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \quad \text{și} \quad \langle P_l^m, P_{l'}^m \rangle = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}.$$

oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$ și $l, l' \in \{m, m+1, m+2, \dots\}$.

Demonstrație. Derivând de m ori ecuația

$$(1-x^2)P_l''(x) - 2xP_l'(x) + l(l+1)P_l(x) = 0$$

verificată de polinomul Legendre P_l obținem relația

$$(1-x^2)P_l^{(m+2)}(x) - 2mxP_l^{(m+1)}(x) - m(m-1)P_l^{(m)}(x)$$

$$-2xP_l^{(m+1)}(x) - 2mP_l^{(m)}(x) + l(l+1)P_l^{(m)}(x) = 0$$

care după înmulțirea cu $(1 - x^2)^m$ se poate scrie sub forma

$$[(1 - x^2)^{m+1} P_l^{(m+1)}(x)]' = -[l(l+1) - m(m+1)] (1 - x^2)^m P_l^m(x).$$

Pentru $m > 0$, utilizând integrarea prin părți și relația precedentă obținem

$$\begin{aligned} \langle P_l^m, P_{l'}^m \rangle &= \int_{-1}^1 (1 - x^2)^m P_l^{(m)}(x) P_{l'}^{(m)}(x) dx \\ &= (1 - x^2)^m P_l^{(m)}(x) P_{l'}^{(m-1)}(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 [(1 - x^2)^m P_l^{(m)}(x)]' P_{l'}^{(m-1)}(x) dx \\ &= (l - m + 1)(l + m) \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{m-1} P_l^{(m-1)}(x) P_{l'}^{(m-1)}(x) dx \\ &= (l - m + 1)(l + m) \langle P_l^{m-1}, P_{l'}^{m-1} \rangle \\ &= (l - m + 1)(l - m + 2)(l + m - 1)(l + m) \langle P_l^{m-2}, P_{l'}^{m-2} \rangle = \dots \\ &= (l - m + 1)(l - m + 2) \dots (l + m) \langle P_l^0, P_{l'}^0 \rangle = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}. \end{aligned}$$

7.2.7 Se poate arăta că oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$ sistemul

$$\left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m \right\}_{l \in \{m, m+1, \dots\}}$$

este o bază ortonormată în spațiul Hilbert $L^2(-1, 1)$. Utilizând schimbarea de variabilă $x = \cos \theta$ rezultă imediat că sistemul de funcții

$$\left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) \right\}_{l \in \{m, m+1, \dots\}}$$

este un sistem ortonormat în raport cu produsul scalar

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(\theta) g(\theta) \sin \theta d\theta.$$

7.3 Polinoame Laguerre

7.3.1 Exercițiu. Să se arate că integrala improprie

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

este convergentă oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

Rezolvare. Fie $x > 0$ și $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n > x$. Deoarece

$$0 < e^{-t} t^{x-1} = \frac{t^{x-1}}{e^t} \leq \begin{cases} t^{x-1} & \text{pentru orice } t \in (0, 1] \\ \frac{n!}{t^{n-x+1}} & \text{pentru orice } t \in [1, \infty) \end{cases}$$

și integralele

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x} \quad \int_1^\infty \frac{dt}{t^{n-x+1}}$$

sunt convergente rezultă că integrala

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

este convergentă oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

7.3.2 Se poate arăta că funcția

$$\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

definită cu ajutorul unei integrale cu parametru, este o funcție continuă.

7.3.3 Teoremă. *Avem*

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x \Gamma(x) && \text{oricare ar fi } x \in (0, \infty) \\ \Gamma(n+1) &= n! && \text{oricare ar fi } n \in \{0, 1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

Demonstrație. Integrând prin părți obținem

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = -\int_0^\infty (e^{-t})' t^x dt = -e^{-t} t^x \Big|_0^\infty + x \int_0^\infty (e^{-t}) t^{x-1} dt = x \Gamma(x).$$

Avem

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \quad \text{și} \quad \Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1) \Gamma(n-1) = \dots = n!$$

7.3.4 Se poate arăta că

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad \text{oricare ar fi } x \in (0, 1).$$

7.3.5 Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)}.$$

7.3.6 Definiție. Funcția $\Gamma : \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt & \text{dacă } x > 0 \\ \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)} & \text{dacă } x > -n \text{ pentru } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

se numește *funcția gamma a lui Euler*.

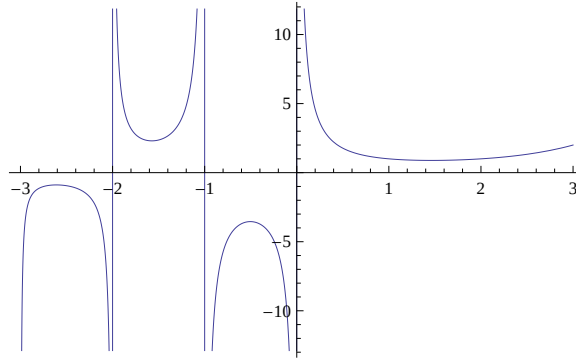


Figura 7.3: Funcția Γ a lui Euler.

7.3.7 Definiție. Polinoamele $L_0^\lambda, L_1^\lambda, L_2^\lambda, \dots$ cu $\lambda > -1$ satisfăcând condițiile

$$L_{2n+1}^\lambda(0) = 0, \quad L_{2n}^\lambda(0) = \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{n! \Gamma(\lambda+1)}$$

obținute ortogonalizând șirul $1, x, x^2, \dots$ în raport cu produsul scalar

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^\infty \varphi(x) \psi(x) x^\lambda e^{-x} dx$$

se numesc *polinoame Laguerre*. Se utilizează notația $L_n = L_n^0$.

7.3.8 Exercițiu. Să se arate că L_n^λ este polinom de gradul n .

7.3.9 Exercițiu. Să se determine polinoamele Laguerre $L_0^\lambda, L_1^\lambda, L_2^\lambda$.

Răspuns. Utilizând metoda de la pag. 252-4 se obțin polinoamele

$$L_0^\lambda(x) = 1, \quad L_1^\lambda(x) = -x + \lambda + 1, \quad L_2^\lambda(x) = \frac{1}{2}x^2 - (\lambda + 2)x + \frac{(\lambda + 2)(\lambda + 1)}{2}.$$

7.3.10 MATHEMATICA: `LaguerreL[n, a, x]`

```
In[1]:=LaguerreL[0, a, x]  ↳ Out[1]=1
In[2]:=LaguerreL[1, a, x]  ↳ Out[2]=1+a-x
In[3]:=LaguerreL[2, a, x]  ↳ Out[3]=1/2(2+3a+a^2-4x-2ax+x^2)
```

7.3.11 Exercițiu. Să se arate că toate rădăcinile polinomului L_n^λ sunt simple și aparțin intervalului $(0, \infty)$.

Rezolvare. A se vedea pag. 253-7.

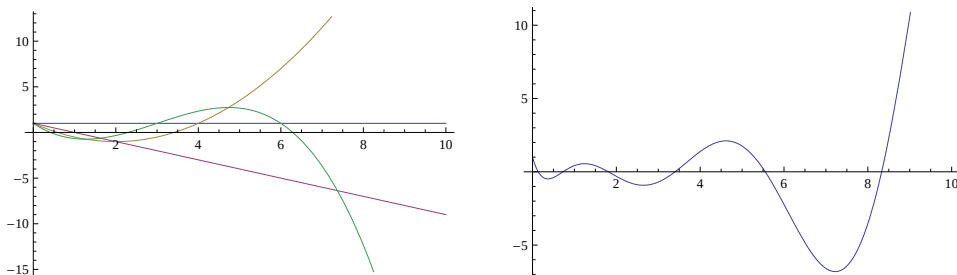


Figura 7.4: Funcțiile L_0 , L_1 , L_2 , L_3 și funcția L_{10} .

7.3.12 Teoremă (Rodrigues). *Polinomul Laguerre L_n^λ verifică relația*

$$L_n^\lambda(x) = \frac{1}{n!} x^{-\lambda} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{\lambda+n} e^{-x}) \quad (7.6)$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 253-8.

7.3.13 Relația (7.6) poate fi utilizată ca definiție pentru polinoamele Laguerre.

7.3.14 Exercițiu. Să se determine L_0^λ , L_1^λ și L_2^λ folosind formula lui Rodrigues.

7.3.15 Propoziție. *Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, ecuația (ecuația polinoamelor Laguerre)*

$$xy'' + (\lambda + 1 - x)y' + ny = 0$$

admite o soluție polinomială dar nu admite soluții polinomiale liniar independente.

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 254-11.

7.3.16 Propoziție. *Soluția polinomială a ecuației*

$$xy'' + (\lambda + 1 - x)y' + ny = 0$$

care verifică condiția

$$y(0) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } n = 2m + 1 \\ \frac{\Gamma(m+\lambda+1)}{m! \Gamma(\lambda+1)} & \text{pentru } n = 2m \end{cases}$$

este polinomul Laguerre L_n^λ .

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 255-12.

7.3.17 Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ avem

$$x(L_n^\lambda)'' + (\lambda + 1 - x)(L_n^\lambda)' + nL_n^\lambda = 0.$$

7.3.18 Teoremă (Funcția generatoare).

Pentru $x \in (0, \infty)$ și $t \in (-1, 1)$ avem

$$\frac{1}{(1-t)^{\lambda+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\lambda(x) t^n.$$

Demonstrație. Este este similară cu demonstrația prezentată la pag. 257-16.

7.3.19 Teoremă. Polinoamele Laguerre verifică relația de recurență

$$(n+1)L_{n+1}^\lambda(x) + (x-\lambda-2n-1)L_n^\lambda(x) + (n+\lambda)L_{n-1}^\lambda(x) = 0$$

oricare ar fi $n \geq 1$.

Demonstrație. Este este similară cu demonstrația prezentată la pag. 258-19.

7.3.20 Teoremă (Norma polinoamelor Laguerre). Avem

$$\langle L_n^\lambda, L_{n'}^\lambda \rangle = \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{n!} \delta_{nn'}.$$

Demonstrație. Inmulțind dezvoltările în serie

$$\frac{1}{(1-t)^{\lambda+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\lambda(x) t^n \quad \text{și} \quad \frac{1}{(1-t)^{\lambda+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m^\lambda(x) t^m$$

obținem relația

$$\frac{1}{(1-t)^{2\lambda+2}} e^{-\frac{2xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} L_n^\lambda(x) L_m^\lambda(x) t^{n+m}$$

din care rezultă

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} t^{n+m} \int_0^\infty L_n^\lambda(x) L_m^\lambda(x) x^\lambda e^{-x} dx &= \frac{1}{(1-t)^{2\lambda+2}} \int_0^\infty e^{-\frac{2xt}{1-t}} x^\lambda e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{(1-t)^{2\lambda+2}} \int_0^\infty e^{-\frac{1+t}{1-t}x} x^\lambda dx. \end{aligned}$$

Utilizând substituția $u = \frac{1+t}{1-t}x$ obținem

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n^\lambda\|^2 t^{2n} &= \frac{1}{(1-t^2)^{\lambda+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^\lambda du = \Gamma(\lambda+1)(1-t^2)^{-\lambda-1} \\ &= \Gamma(\lambda+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda-1)(-\lambda-2)\dots(-\lambda-n)}{n!} (-t^2)^n \\ &= \Gamma(\lambda+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n)}{n!} t^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{n!} t^{2n}. \end{aligned}$$

7.3.21 Teoremă.

Dacă funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este dezvoltabilă în serie de polinoame Laguerre

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n^\lambda(x) \quad (7.7)$$

atunci

$$C_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\lambda+1)} \int_0^\infty f(x) L_n^\lambda(x) x^\lambda e^{-x} dx. \quad (7.8)$$

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 260-24.

7.3.22 Exercițiu. Să se arate că

$$e^{-x} = \frac{1}{2^{\lambda+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} L_n^\lambda(x).$$

Rezolvare. A se vedea [16], pag. 251.

7.3.23 Teoremă (Formula Christoffel-Darboux).

$$\sum_{k=0}^n \frac{k!}{\Gamma(k+\lambda+1)} L_k^\lambda(x) L_k^\lambda(y) = \frac{(n+1)!}{\Gamma(k+\lambda+1)} \frac{L_n^\lambda(x) L_{n+1}^\lambda(y) - L_{n+1}^\lambda(x) L_n^\lambda(y)}{x-y}.$$

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 260-27.

7.4 Polinoame Hermite**7.4.1 Definiție.** Polinoamele $H_0, H_1, H_2 \dots$ satisfacând condițiile

$$H_{2n+1}(0) = 0, \quad H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$$

obținute ortogonalizând șirul $1, x, x^2, \dots$ în raport cu produsul scalar

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \psi(x) e^{-x^2} dx$$

se numesc *polinoame Hermite*.

7.4.2 Exercițiu. Să se arate că H_n este polinom de gradul n .**7.4.3 Exercițiu.** Să se determine polinoamele Hermite H_0, H_1, H_2 .

Răspuns. Utilizând metoda de la pag. 252-4 se obțin polinoamele

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2.$$

7.4.4 MATHEMATICA: HermiteH[n, x]

```
In[1]:=HermiteH[0, x]  ↳ Out[1]=1
In[2]:=HermiteH[1, x]  ↳ Out[2]=2x
In[3]:=HermiteH[2, x]  ↳ Out[3]=-2+4x2
```

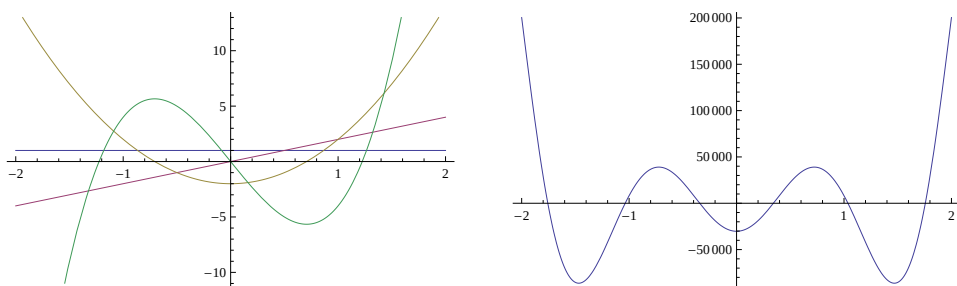


Figura 7.5: Funcțiile H_0 , H_1 , H_2 , H_3 și funcția H_{10} .

7.4.5 Exercițiu. Să se arate că toate rădăcinile polinomului H_n sunt simple.

Rezolvare. A se vedea pag. 253-7.

7.4.6 Teoremă (Rodrigues). *Polinomul Hermite H_n verifică relația*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (7.9)$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 253-8.

7.4.7 Relația (7.9) poate fi utilizată ca definiție pentru polinoamele Hermite.

7.4.8 Exercițiu. Să se determine H_0 , H_1 și H_2 folosind formula lui Rodrigues.

7.4.9 Propoziție. *Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, ecuația (ecuația polinoamelor Hermite)*

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

admite o soluție polinomială dar nu admite soluții polinomiale liniar independente.

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 254-11.

7.4.10 Propoziție. *Soluția polinomială a ecuației*

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

care verifică condiția

$$y(0) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } n = 2m + 1 \\ (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} & \text{pentru } n = 2m \end{cases}$$

este polinomul Hermite H_n .

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 255-12.

7.4.11 Ecuația diferențială verificată de polinomul P_n

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0.$$

se poate scrie sub forma

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx}\right) H_n = 2n H_n.$$

Din

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} &= \left(-\frac{d}{dx} + 2x\right) \frac{d}{dx} \\ -\frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(-\frac{d}{dx} + 2x\right) - 2 \end{aligned}$$

rezultă relațiile

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx}\right) \frac{d}{dx} H_n &= 2(n-1) \frac{d}{dx} H_n \\ \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx}\right) \left(-\frac{d}{dx} + 2x\right) H_n &= 2(n+1) \left(-\frac{d}{dx} + 2x\right) H_n \end{aligned}$$

care arată că :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} H_n &\text{ coincide cu } H_{n-1} \text{ până la o constantă multiplicativă} \\ \left(-\frac{d}{dx} + 2x\right) H_n &\text{ coincide cu } H_{n+1} \text{ până la o constantă multiplicativă.} \end{aligned}$$

7.4.12 Teoremă (Funcția generatoare). *Avem*

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n. \quad (7.10)$$

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 257-16.

7.4.13 Exercițiu. Să se determine H_0 , H_1 și H_2 folosind funcția generatoare.

7.4.14 Exercițiu. Să se arate că

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

Rezolvare. Relația rezultă din

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = e^{2tx-t^2} = e^{2(-t)(-x)-(-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(-x)}{n!} (-t)^n.$$

7.4.15 Teoremă. Polinoamele Hermite verifică relația de recurență

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

oricare ar fi $n \geq 1$.

Demonstrație. Este este similară cu demonstrația prezentată la pag. 258-19.

7.4.16 Teoremă. Polinoamele Hermite verifică relațiile

$$\frac{d}{dx} H_n = 2n H_{n-1} \quad \text{și} \quad \left(-\frac{d}{dx} + 2x \right) H_n = H_{n+1}.$$

Demonstrație. Derivând (7.10) în raport cu x obținem relația

$$2te^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n.$$

care se mai poate scrie

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n.$$

Identificând coeficienții se rezultă prima relație din teoremă. Înlocuind în relația de recurență se obține a doua relație din enunț.

7.4.17 Teoremă (Norma polinoamelor Hermite). *Avem*

$$\langle H_n, H_{n'} \rangle = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nn'}.$$

Demonstrație. Este este similară cu demonstrația prezentată la pag. 267-20.

7.4.18 Teoremă.

Dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este dezvoltabilă în serie de polinoame Hermite

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n(x) \tag{7.11}$$

atunci

$$C_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n(x) e^{-x^2} dx. \tag{7.12}$$

Demonstrație. Este este similară cu demonstrația prezentată la pag. 260-24.

7.4.19 Exercițiu. Să se arate că

$$\begin{aligned} a) \quad |x| &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n} n! (2n-1)} H_{2n}(x) \\ b) \quad \sin tx &= e^{-\frac{t^2}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)! 2^{2n+1}} H_{2n+1}(x). \end{aligned}$$

Rezolvare. A se vedea [16], pag. 242-243.

7.4.20 Teoremă (Formula Christoffel-Darboux).

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k k!} H_k(x) H_k(y) = \frac{H_{n+1}(x) H_n(y) - H_n(x) H_{n+1}(y)}{n! 2^{n+1} (x - y)}.$$

Demonstrație. Este este similară cu demonstrația prezentată la pag. 260-27.

7.4.21 Polinoamele

$$H_n^*(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \quad (7.13)$$

direct legate de polinoamele Hermite

$$H_n(x) = \sqrt{2^n} H_n^*(x\sqrt{2})$$

verifică relațiile

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^*(x) H_m^*(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = n! \sqrt{2\pi} \delta_{nm}$$

$$(H_m^*)'' - x(H_m^*)' + m H_m^* = 0$$

$$e^{2tx - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^*(x)}{n!} t^n$$

$$H_{n+1}^*(x) - x H_n^*(x) + n H_{n-1}^*(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx} H_n^* = n H_{n-1}^*$$

$$\left(-\frac{d}{dx} + x \right) H_n^* = H_{n+1}^*.$$

7.5 Polinoame de tip hipergeometric

7.5.1 Polinoamele Legendre, Laguerre și Hermite prezentate în secțiunile anterioare reprezintă cele mai simple funcții speciale. Definițiile și rezultatele prezentate admit importante generalizări. Ele sunt cazuri particulare pentru cele referitoare la polinoamele de tip hipergeometric și funcțiile speciale asociate lor.

7.5.2 Ecuațiile de forma (numite *ecuații de tip hipergeometric*)

$$\sigma(s) y''(s) + \tau(s) y'(s) + \lambda y(s) = 0 \quad (7.14)$$

unde $\sigma(s) \neq 0$ este un polinom de grad cel mult 2 și $\tau(s)$ un polinom de grad cel mult 1, joacă un rol important în mecanica cuantică și fizica matematică. Funcțiile care verifică astfel de ecuații sunt numite *funcții de tip hypergeometric* [19].

7.5.3 Propoziție.

Derivatele funcțiilor de tip hipergeometric sunt funcții de tip hipergeometric.

Demonstrație. Derivând ecuația (7.14) obținem relația

$$\sigma(s) (y')''(s) + \sigma'(s) (y')'(s) + \tau(s) (y')'(s) + \tau'(s) y'(s) + \lambda y'(s) = 0$$

adică funcția $v_1(s) = y'(s)$ verifică ecuația de tip hipergeometric

$$\sigma(s) v_1''(s) + \tau_1(s) v_1'(s) + \mu_1 v_1(s) = 0 \quad (7.15)$$

unde

$$\tau_1(s) = \tau(s) + \sigma'(s) \quad \text{și} \quad \mu_1 = \lambda + \tau'(s).$$

Derivând de n ori ecuația (7.14) obținem relația

$$\begin{aligned} \sigma(s) (y^{(n)})''(s) + n\sigma'(s) (y^{(n)})'(s) + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''(s) y^{(n)}(s) \\ + \tau(s) (y^{(n)})'(s) + n\tau'(s) y^{(n)}(s) + \tau(s) (y^{(n)})'(s) + \lambda y^{(n)}(s) = 0 \end{aligned}$$

adică funcția $v_n(s) = y^{(n)}(s)$ verifică ecuația de tip hipergeometric

$$\sigma(s) v_n''(s) + \tau_n(s) v_n'(s) + \mu_n v_n(s) = 0 \quad (7.16)$$

unde

$$\tau_n(s) = \tau(s) + n\sigma'(s) \quad \text{și} \quad \mu_n = \lambda + n\tau' + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''. \quad (7.17)$$

7.5.4 Lemă. Dacă $\mu_1 - \tau'_1 + \sigma'' \neq 0$ atunci orice soluție v_1 a ecuației

$$\sigma(s) v_1''(s) + \tau_1(s) v_1'(s) + \mu_1 v_1(s) = 0$$

este derivata unei soluții y a ecuației

$$\sigma(s) y''(s) + \tau(s) y'(s) + \lambda y(s) = 0$$

cu

$$\tau(s) = \tau_1(s) - \sigma'(s) \quad \text{și} \quad \lambda = \mu_1 - \tau' = \mu_1 - \tau'_1 + \sigma''.$$

Demonstrație. Fie v_1 o soluție a ecuației (7.15). Funcția y care verifică condițiile

$$\sigma(s) y''(s) + \tau(s) y'(s) + \lambda y(s) = 0 \quad \text{și} \quad v_1(s) = y'(s)$$

este

$$y(s) = -\frac{1}{\lambda}[\sigma(s)v_1'(s) + \tau(s)v_1(s)] = -\frac{1}{\lambda}[\sigma(s)v_1'(s) + \tau_1(s)v_1(s) - \sigma'(s)v_1(s)].$$

Prin calcul direct se obține că y astfel definită îndeplinește condițiile cerute.

7.5.5 Din relațiile

$$\tau_m(s) = \tau(s) + m\sigma'(s) \quad \text{și} \quad \mu_m = \lambda + m\tau' + \frac{1}{2}m(m-1)\sigma''$$

rezultă că

$$\mu_k = \mu_n - (n-k)\tau'_n - \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)\sigma''$$

oricare ar fi $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

7.5.6 Teoremă. Dacă μ_n și τ_n sunt astfel încât

$$\mu_k \neq 0, \quad \text{oricare ar fi } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \quad (7.18)$$

atunci orice soluție v_n a ecuației

$$\sigma(s)v_n''(s) + \tau_n(s)v_n'(s) + \mu_n v_n(s) = 0 \quad (7.19)$$

este derivata de ordin n a unei soluții y a ecuației

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) + \lambda y(s) = 0$$

cu

$$\tau(s) = \tau_n(s) - n\sigma'(s) \quad \text{și} \quad \lambda = \mu_n - n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''.$$

Demonstrație. Ipoteza permite aplicarea succesivă de n ori a lemei precedente.

7.5.7 În cazul $\mu_n = 0$ ecuația (7.19) admite soluția $v_n = \text{const}$ și condiția (7.18) devine

$$\tau'_n + \frac{1}{2}(n-k+1)\sigma'' \neq 0, \quad \text{oricare ar fi } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

În acest caz, $v_n = \text{const}$ este derivata de ordin n a unei soluții y a ecuației

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) + \lambda_n y(s) = 0$$

unde

$$\lambda_n = -\frac{\sigma''}{2}n(n-1) - n\tau'$$

adică această ecuație admite ca soluție un polinom Φ_n de gradul n

$$\sigma(s)\Phi_n''(s) + \tau(s)\Phi_n'(s) + \lambda_n \Phi_n(s) = 0 \quad (7.20)$$

7.5.8 Ecuația (7.14), adică ecuația

$$\sigma(s) y'' + \tau(s) y' + \lambda y = 0 \quad (7.21)$$

se poate scrie sub forma auto-adjunctă

$$[\sigma \varrho y']' + \lambda \varrho y = 0$$

alegând o funcție ϱ astfel încât $(\sigma \varrho)' = \tau \varrho$, adică astfel încât

$$\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{\tau}{\sigma}.$$

Din ultima relație rezultă că

$$\ln(\sigma \varrho) = \int^s \frac{\tau(t)}{\sigma(t)} dt$$

unde $\int^s \frac{\tau(t)}{\sigma(t)} dt$ este o primitivă funcției $\frac{\tau(t)}{\sigma(t)}$, și prin urmare putem alege

$$\varrho(s) = \frac{1}{\sigma(s)} e^{\int^s \frac{\tau(t)}{\sigma(t)} dt}. \quad (7.22)$$

7.5.9 Propoziție. Ecuația

$$\sigma(s) v_n'' + \tau_n(s) v_n' + \mu_n v_n = 0$$

se poate scrie sub forma auto-adjunctă

$$[\sigma \varrho_n v_n']' + \mu_n \varrho_n v_n = 0$$

alegând

$$\varrho_n(s) = \sigma^n(s) \varrho(s).$$

Demonstrație. Deoarece $\tau_n(s) = \tau(s) + n\sigma'(s)$, din $(\sigma \varrho)' = \tau \varrho$ și $(\sigma \varrho_n)' = \tau_n \varrho_n$ rezultă

$$\frac{(\sigma \varrho_n)'}{\varrho_n} = \frac{(\sigma \varrho)'}{\varrho} + n\sigma'$$

adică relația

$$\frac{\varrho_n'}{\varrho_n} = \frac{\varrho'}{\varrho} + n \frac{\sigma'}{\sigma}$$

care arată că putem alege $\varrho_n(s) = \sigma^n(s) \varrho(s)$.

7.5.10 Teoremă (Rodrigues). Polinomul Φ_n de gradul n care verifică ecuația

$$\sigma(s) \Phi_n''(s) + \tau(s) \Phi_n'(s) + \lambda_n \Phi_n(s) = 0$$

este (până la o constantă multiplicativă)

$$\Phi_n(s) = \frac{1}{\varrho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s) \varrho(s)].$$

Demonstrație. Relațiile $\varrho_{k+1}(s) = \sigma(s) \varrho_k(s)$ și $v_k(s) = \Phi_n^{(k)}(s)$ ne permit să scriem egalitatea $[\sigma \varrho_k v'_k]' + \mu_k \varrho_k v_k = 0$ sub forma unei relații de recurență

$$\varrho_k v_k = -\frac{1}{\mu_k}(\varrho_{k+1} v_{k+1})$$

care aplicată succesiv conduce la

$$\begin{aligned} \varrho \Phi_n = -\frac{1}{\mu_0}(\varrho_1 v_1)' &= \left(-\frac{1}{\mu_0}\right) \left(-\frac{1}{\mu_1}\right) (\varrho_2 v_2)'' = \dots \\ &= \left(-\frac{1}{\mu_0}\right) \left(-\frac{1}{\mu_1}\right) \dots \left(-\frac{1}{\mu_{n-1}}\right) (\varrho_n v_n)^{(n)}. \end{aligned}$$

Deoarece $v_n(s) = \text{const}$ și $\varrho_n(s) = \sigma^n(s) \varrho(s)$ se obține pentru Φ_n relația din enunț.

7.5.11 Ecuația (7.14) se consideră în mod uzual pe un interval (a, b) , ales astfel încât

$$\begin{aligned} \sigma(s) > 0 & \quad \text{oricare ar fi} \quad s \in (a, b) \\ \varrho(s) > 0 & \quad \text{oricare ar fi} \quad s \in (a, b) \\ \lim_{s \rightarrow a} \sigma(s) \varrho(s) = \lim_{s \rightarrow b} \sigma(s) \varrho(s) = 0. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Dacă se utilizează în ecuația (7.14) o schimbare de variabilă $t = cs + d$ cu $c \neq 0$ și se notează cu $z(t)$ noua funcție necunoscută aleasă astfel încât $y(s) = z(cs + d)$ atunci pentru z se obține ecuația de tip hipergeometric

$$c^2 \sigma \left(\frac{1}{c} t - \frac{d}{c} \right) z''(t) + c \tau \left(\frac{1}{c} t - \frac{d}{c} \right) z'(t) + \lambda z(t) = 0.$$

O schimbare de variabilă $s \mapsto cs + d$ permite reducerea cazului în care σ este polinom de gradul zero la $\sigma(s) = 1$. Similar, cazurile în care σ este polinom de gradul întâi pot fi reduse la $\sigma(s) = s$. Cazurile în care σ este polinom de gradul al doilea pot fi reduse la $\sigma(s) = s^2 + 1$ (dacă σ nu are rădăcini reale), $\sigma(s) = s^2$ (dacă σ are o singură rădăcină reală), $\sigma(s) = 1 - s^2$ (dacă σ are două rădăcini reale și este pozitivă între rădăcini), $\sigma(s) = s^2 - 1$ (dacă σ are două rădăcini reale și este negativă între rădăcini). Păstrăm pentru τ forma generală $\tau(s) = \alpha s + \beta$ dar impunem coeficienților α, β restricțiile necesare pentru ca intervalul (a, b) verificând condițiile (7.23) să existe (a se vedea tabelul 7.1).

7.5.12 Aplicația $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : \ell \mapsto \lambda_\ell$ este strict crescătoare pe mulțimea

$$\{ \ell \in \mathbb{N} \mid \ell \leq \Lambda \}$$

unde

$\sigma(s)$	$\tau(s)$	$\varrho(s)$	(a, b)	α, β
1	$\alpha s + \beta$	$e^{\alpha s^2/2 + \beta s}$	$(-\infty, \infty)$	$\alpha < 0$
s	$\alpha s + \beta$	$s^{\beta-1} e^{\alpha s}$	$(0, \infty)$	$\alpha < 0, \beta > 0$
$1-s^2$	$\alpha s + \beta$	$(1+s)^{-(\alpha-\beta)/2-1} (1-s)^{-(\alpha+\beta)/2-1}$	$(-1, 1)$	$\alpha < \beta < -\alpha$
s^2-1	$\alpha s + \beta$	$(s+1)^{(\alpha-\beta)/2-1} (s-1)^{(\alpha+\beta)/2-1}$	$(1, \infty)$	$-\beta < \alpha < 0$
s^2	$\alpha s + \beta$	$s^{\alpha-2} e^{-\beta/s}$	$(0, \infty)$	$\alpha < 0, \beta > 0$
s^2+1	$\alpha s + \beta$	$(1+s^2)^{\alpha/2-1} e^{\beta \arctan s}$	$(-\infty, \infty)$	$\alpha < 0$

Tabelul 7.1: Principalele șase cazuri

$$\Lambda = \begin{cases} \infty & \text{pentru } \sigma(s)=1, s, 1-s^2 \\ \frac{1-\alpha}{2} & \text{pentru } \sigma(s)=s^2-1, s^2, s^2+1 \end{cases}$$

și impunând restricțiile prezentate în tabelul 7.1 obținem

$$\left\{ \gamma \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \lim_{s \rightarrow a} \sigma(s) \varrho(s) s^\gamma = 0 \\ \lim_{s \rightarrow b} \sigma(s) \varrho(s) s^\gamma = 0 \end{array} \right\} = \begin{cases} [0, \infty) & \text{pentru } \sigma(s)=1, s, 1-s^2 \\ [0, -\alpha) & \text{pentru } \sigma(s)=s^2-1, s^2, s^2+1. \end{cases}$$

7.5.13 Teoremă. *Sistemul de polinoame $\{\Phi_\ell \mid 0 \leq \ell < \Lambda\}$ este ortogonal, adică*

$$\int_a^b \Phi_\ell(s) \Phi_k(s) \varrho(s) ds = 0 \quad \text{pentru } \ell \neq k.$$

Demonstrație. Dacă $0 \leq \ell, k < \Lambda$ și $\ell \neq k$ atunci din ecuațiile

$$[\sigma(s) \varrho(s) \Phi'_\ell]' + \lambda_\ell \varrho(s) \Phi_\ell = 0 \quad [\sigma(s) \varrho(s) \Phi'_k]' + \lambda_k \varrho(s) \Phi_k = 0$$

obținem relația

$$(\lambda_\ell - \lambda_k) \Phi_\ell(s) \Phi_k(s) \varrho(s) = \frac{d}{ds} \{ \sigma(s) \varrho(s) [\Phi_\ell(s) \Phi'_k(s) - \Phi_k(s) \Phi'_\ell(s)] \}$$

din care rezultă

$$\begin{aligned} (\lambda_\ell - \lambda_k) \int_a^b \Phi_\ell(s) \Phi_k(s) \varrho(s) ds &= \lim_{s \rightarrow b} \sigma(s) \varrho(s) [\Phi_\ell(s) \Phi'_k(s) - \Phi_k(s) \Phi'_\ell(s)] \\ &\quad - \lim_{s \rightarrow a} \sigma(s) \varrho(s) [\Phi_\ell(s) \Phi'_k(s) - \Phi_k(s) \Phi'_\ell(s)] = 0 \end{aligned}$$

7.5.14 Teoremă. *Până la o constantă multiplicativă, avem*

$$\Phi_\ell(s) = \begin{cases} H_\ell\left(\sqrt{\frac{-\alpha}{2}}s - \frac{\beta}{\sqrt{-2\alpha}}\right) & \text{dacă } \sigma(s)=1 \\ L_\ell^{\beta-1}(-\alpha s) & \text{dacă } \sigma(s)=s \\ P_\ell^{(-(\alpha+\beta)/2-1, (-\alpha+\beta)/2-1)}(s) & \text{dacă } \sigma(s)=1-s^2 \\ P_\ell^{((\alpha-\beta)/2-1, (\alpha+\beta)/2-1)}(-s) & \text{dacă } \sigma(s)=s^2-1 \\ \left(\frac{s}{\beta}\right)^\ell L_\ell^{1-\alpha-2\ell}\left(\frac{\beta}{s}\right) & \text{dacă } \sigma(s)=s^2 \\ i^\ell P_\ell^{((\alpha+i\beta)/2-1, (\alpha-i\beta)/2-1)}(is) & \text{dacă } \sigma(s)=s^2+1 \end{cases}$$

Demonstrație. În cazul $\sigma(s) = s^2$, polinomul $\Phi_\ell(s)$ verifică ecuația

$$s^2 y'' + (\alpha s + \beta) y' + [-\ell(\ell-1) - \alpha\ell] y = 0.$$

Dacă notăm $t = \beta/s$ atunci polinomul $u(t) = t^\ell \Phi_\ell(\beta/t)$ verifică ecuația

$$t u'' + (-\alpha + 2 - 2\ell - t) u' + \ell u = 0$$

adică ecuația a cărei soluție polinomială este $L_\ell^{1-\alpha-2\ell}(s)$, până la o constantă multiplicativă. În celelalte cazuri, relația se demonstrează similar.

7.5.15 Polinoamele ortogonale de tip hipergeometric Φ_ℓ se pot exprima cu ajutorul polinoamelor ortogonale clasice, dar relația nu are în toate cazurile o formă simplă. În unele cazuri este nevoie ca polinoamele ortogonale clasice să fie considerate în afara intervalului pe care ele sunt ortogonale sau pentru valori complexe ale parametrilor sau variabilei.

7.5.16 Teoremă. Dacă $0 \leq \ell < \Lambda$ atunci Φ_ℓ este un polinom de grad ℓ și

$$\int_a^b |\Phi_\ell(s)|^2 \varrho(s) ds < \infty.$$

Demonstrație. Fiecare Φ_ℓ este un polinom de grad cel mult ℓ și $\{\Phi_\ell \mid 0 \leq \ell < \Lambda\}$ este sistem liniar independent. Acest lucru este posibil numai dacă Φ_ℓ este polinom de grad ℓ oricare ar fi $\ell < \Lambda$. În cazurile $\sigma(s) = s^2 - 1$, $\sigma(s) = s^2$ și $\sigma(s) = s^2 + 1$ avem $\ell < (1 - \alpha)/2$, adică, $2\ell - 1 < -\alpha$. De aceea, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $1 + \varepsilon + 2\ell - 2 = 2\ell - 1 + \varepsilon < -\alpha$ și prin urmare

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^{1+\varepsilon} |\Phi_\ell(s)|^2 \varrho(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^{1+\varepsilon} (\Phi_\ell(s))^2}{\sigma(s)} \sigma(s) \varrho(s) = 0.$$

Convergența integralei (16) rezultă din convergența integralei $\int_1^\infty s^{-1-\varepsilon} ds$.

7.6 Funcții speciale asociate

7.6.1 Polinoamele Legendre sunt polinoame de tip hipergeometric.

Funcțiile definite cu ajutorul polinoamelor Legendre

$$P_l^m(s) = \left(\sqrt{1-s^2}\right)^m \frac{d^m}{ds^m} P_l(s)$$

se numesc *funcții Legendre asociate*.

7.6.2 Definiție. Funcțiile definite cu ajutorul polinoamelor de tip hipergeometric

$$\Phi_{\ell,m}(s) = \left(\sqrt{\sigma(s)}\right)^m \frac{d^m}{ds^m} \Phi_{\ell}(s) \quad \text{unde} \quad \begin{array}{l} \ell \in \mathbb{N}, \quad \ell < \Lambda \\ m \in \{0, 1, \dots, \ell\} \end{array} \quad (7.24)$$

se numesc *funcții speciale asociate* (polinoamelor de tip hipergeometric).

7.6.3 Utilizând notația

$$\kappa(s) = \sqrt{\sigma(s)}$$

definiția funcțiilor speciale asociate se poate scrie sub forma

$$\Phi_{\ell,m}(s) = \kappa^m(s) \frac{d^m}{ds^m} \Phi_{\ell}(s).$$

Teoremă. *Funcțiile speciale asociate $\Phi_{\ell,m}$ verifică relația*

$$\mathcal{H}_m \Phi_{\ell,m} = \lambda_{\ell} \Phi_{\ell,m}$$

unde $\mathcal{H}_m$ este operatorul diferențial de tip hipergeometric

$$\mathcal{H}_m = -\sigma(s) \frac{d^2}{ds^2} - \tau(s) \frac{d}{ds} + v_m(s)$$

cu $v_m(s)$ definit prin

$$v_m(s) = \frac{m(m-2)}{4} \frac{(\sigma'(s))^2}{\sigma(s)} + \frac{m\tau(s)}{2} \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s)} - \frac{1}{2} m(m-2) \sigma''(s) - m\tau'(s).$$

Demonstrație. Fie $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell < \Lambda$ și fie $m \in \{0, 1, \dots, \ell\}$. Derivând de m ori relația (7.20) obținem ecuația verificată de polinoamele $\varphi_{\ell,m} = \frac{d^m}{ds^m} \Phi_{\ell}$, adică

$$\sigma(s) \varphi_{\ell,m}'' + [\tau(s) + m\sigma'(s)] \varphi_{\ell,m}' + (\lambda_{\ell} - \lambda_m) \varphi_{\ell,m} = 0.$$

Această ecuație, înmulțită cu $\kappa^m(s)$ se poate scrie sub forma

$$\mathcal{H}_m \Phi_{\ell,m} = \lambda_{\ell} \Phi_{\ell,m}.$$

7.6.4 Ecuația

$$\sigma(s)\varphi''_{\ell,m} + [\tau(s) + m\sigma'(s)]\varphi'_{\ell,m} + (\lambda_\ell - \lambda_m)\varphi_{\ell,m} = 0. \quad (7.25)$$

verificată de polinoamele

$$\varphi_{\ell,m} = \frac{d^m}{ds^m} \Phi_\ell$$

se poate scrie sub forma auto-adjunctă

$$[\sigma(s)\varrho_m(s)\varphi'_{\ell,m}]' + (\lambda_\ell - \lambda_m)\varrho_m(s)\varphi_{\ell,m} = 0$$

alegând

$$\varrho_m(s) = \sigma^m(s)\varrho(s)$$

7.6.5 Teoremă. *Dacă $m < \Lambda$ atunci sistemul de funcții*

$$\{\Phi_{\ell,m} \mid m \leq \ell < \Lambda\}$$

este ortogonal

$$\int_a^b \Phi_{\ell,m}(s)\Phi_{k,m}(s)\varrho(s)ds = 0 \quad \text{for } \ell \neq k$$

și

$$\int_a^b |\Phi_{\ell,m}(s)|^2 \varrho(s)ds < \infty \quad \text{for } m \leq \ell < \Lambda. \quad (7.26)$$

Demonstrație. In cazurile $\sigma(s) = s^2 - 1$, s^2 , $s^2 + 1$, pentru $k < -\alpha - 2m$ avem

$$\lim_{s \rightarrow a} \sigma(s)\varrho_m(s)s^k = \lim_{s \rightarrow b} \sigma(s)\varrho_m(s)s^k = 0.$$

Deoarece ecuația (7.25) este de tip hipergeometric, $\varphi_{\ell,m}$ este polinom de gradul $\ell - m$ și $\varphi_{k,m}$ este polinom de gradul $k - m$, din teorema de la pag. 277-13 rezultă că avem

$$\int_a^b \varphi_{\ell,m}(s)\varphi_{k,m}(s)\varrho_m(s)ds = 0$$

pentru $\ell \neq k$ cu $(\ell - m) + (k - m) < -\alpha - 2m$, adică pentru $\ell + k < -\alpha$. Dar $\varrho_m(s) = \sigma^m(s)\varrho(s)$ și prin urmare

$$\int_a^b \varphi_{\ell,m}(s)\varphi_{k,m}(s)\varrho_m(s)ds = \int_a^b \Phi_{\ell,m}(s)\Phi_{k,m}(s)\varrho(s)ds.$$

In cazurile $\sigma(s) = s^2 - 1$, s^2 , $s^2 + 1$, pentru $\varepsilon > 0$ ales astfel încât $2\Lambda + \varepsilon < 1 - \alpha$ obținem relația $1 + \varepsilon + 2(m - 1) + 2(\ell - m) \leq 1 + \varepsilon + 2\Lambda - 2 < -\alpha$ care conduce la

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^{1+\varepsilon} (\Phi_{\ell,m}(s))^2 \varrho(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{1+\varepsilon} \sigma^{m-1}(s) \left(\frac{d^m}{ds^m} \Phi_\ell(s) \right)^2 \sigma(s)\varrho(s) = 0.$$

Convergența integralei (7.26) rezultă din convergența integralei $\int_1^\infty s^{-1-\varepsilon} ds$.

7.6.6 Teoremă. Dacă $0 < m < \ell < \Lambda$ atunci

$$\Phi_{\ell, m+1}(s) + \left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} + 2(m-1)\kappa'(s) \right) \Phi_{\ell, m}(s) + (\lambda_\ell - \lambda_{m-1})\Phi_{\ell, m-1}(s) = 0 \quad (7.27)$$

și

$$\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} + 2(\ell-1)\kappa'(s) \right) \Phi_{\ell, \ell}(s) + (\lambda_\ell - \lambda_{\ell-1})\Phi_{\ell, \ell-1}(s) = 0. \quad (7.28)$$

Demonstrație. Derivând de $m-1$ ecuația (7.20) obținem

$$\begin{aligned} \sigma(s) \frac{d^{m+1}}{ds^{m+1}} \Phi_\ell(s) + (m-1)\sigma'(s) \frac{d^m}{ds^m} \Phi_\ell(s) + \frac{(m-1)(m-2)}{2} \sigma''(s) \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \Phi_\ell(s) \\ + \tau(s) \frac{d^m}{ds^m} \Phi_\ell(s) + (m-1)\tau'(s) \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \Phi_\ell(s) + \lambda_\ell \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \Phi_\ell(s) = 0. \end{aligned}$$

Inmulțind relația cu $\kappa^{m-1}(s)$ obținem (7.27) pentru $0 < m < \ell$ și (7.28) pentru $m = \ell$.

7.6.7 Teoremă. Operatorii diferențiali de ordinul întâi

$$a_m = \kappa(s) \frac{d}{ds} - m\kappa'(s)$$

$$a_m^+ = -\kappa(s) \frac{d}{ds} - \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} - (m-1)\kappa'(s)$$

sunt operatori de creștere, respectiv coborâre pentru funcțiile $\Phi_{\ell, m}$

$$a_m \Phi_{\ell, m} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \ell = m \\ \Phi_{\ell, m+1} & \text{pentru } m < \ell < \Lambda \end{cases} \quad (7.29)$$

$$a_m^+ \Phi_{\ell, m+1} = (\lambda_\ell - \lambda_m) \Phi_{\ell, m} \quad \text{for } 0 \leq m < \ell < \Lambda$$

Demonstrație. Oricare ar fi $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell < \Lambda$ și $m \in \{0, 1, \dots, \ell-1\}$, derivând (7.24) obținem

$$\frac{d}{ds} \Phi_{\ell, m}(s) = m\kappa^{m-1}(s)\kappa'(s) \frac{d^m}{ds^m} \Phi_\ell + \kappa^m(s) \frac{d^{m+1}}{ds^{m+1}} \Phi_\ell(s)$$

adică relația

$$\frac{d}{ds} \Phi_{\ell, m}(s) = m \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)} \Phi_{\ell, m}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \Phi_{\ell, m+1}(s)$$

care se mai poate scrie sub forma

$$\left(\kappa(s) \frac{d}{ds} - m\kappa'(s) \right) \Phi_{\ell, m}(s) = \Phi_{\ell, m+1}(s). \quad (7.30)$$

Dacă $m \in \{1, 2, \dots, \ell-1\}$ atunci înlocuind (7.30) în (7.27) obținem

$$\left(\kappa(s) \frac{d}{ds} + \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} + (m-2)\kappa'(s) \right) \Phi_{\ell, m}(s) + (\lambda_\ell - \lambda_{m-1})\Phi_{\ell, m-1}(s) = 0$$

adică,

$$\left(-\kappa(s) \frac{d}{ds} - \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} - (m-1)\kappa'(s) \right) \Phi_{\ell, m+1}(s) = (\lambda_\ell - \lambda_m)\Phi_{\ell, m}(s)$$

oricare ar fi $m \in \{0, 1, \dots, \ell-2\}$. Din (7.28) rezultă că relația are loc și pentru $m = \ell-1$.

7.6.8 Teoremă.

$$\Phi_{\ell,m}(s) = \begin{cases} \kappa^\ell(s) & \text{pentru } m = \ell \\ \frac{a_m^+}{\lambda_\ell - \lambda_m} \frac{a_{m+1}^+}{\lambda_\ell - \lambda_{m+1}} \dots \frac{a_{\ell-1}^+}{\lambda_\ell - \lambda_{\ell-1}} \kappa^\ell(s) & \text{pentru } 0 < m < \ell < \Lambda. \end{cases} \quad (7.31)$$

Demonstrație. Consecință directă a relației (7.29).

7.6.9 Teoremă.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_m - \lambda_m &= a_m^+ a_m & \mathcal{H}_m a_m^+ &= a_m^+ \mathcal{H}_{m+1} \\ \mathcal{H}_{m+1} - \lambda_m &= a_m a_m^+ & a_m \mathcal{H}_m &= \mathcal{H}_{m+1} a_m \end{aligned} \quad (7.32)$$

Demonstrație. Verificare directă.

7.6.10 Teoremă.

$$\|\Phi_{\ell,m+1}\| = \sqrt{\lambda_\ell - \lambda_m} \|\Phi_{\ell,m}\| \quad \text{pentru } 0 \leq m < \ell < \Lambda.$$

Demonstrație. Deoarece $\sigma^m(s) \frac{d^m}{ds^m} \Phi_\ell(s) \frac{d^{m+1}}{ds^{m+1}} \Phi_k(s)$ este polinom de gradul $\ell + k - 1$

$$\begin{aligned} \langle a_m \Phi_{\ell,m}, \Phi_{k,m+1} \rangle &= \int_a^b [\kappa(s) \Phi'_{\ell,m}(s) - m \kappa'(s) \Phi_{\ell,m}(s)] \Phi_{k,m+1}(s) \varrho(s) ds \\ &= \kappa(s) \Phi_{\ell,m}(s) \Phi_{k,m+1}(s) \varrho(s) \Big|_a^b - \int_a^b \Phi_{\ell,m}(s) [\kappa(s) \Phi'_{k,m+1}(s) \varrho(s) \\ &\quad + \kappa(s) \Phi_{k,m+1}(s) \varrho'(s) + (m+1) \kappa'(s) \Phi_{k,m+1}(s) \varrho(s)] ds \\ &= \sigma(s) \varrho(s) \sigma^m(s) \frac{d^m}{ds^m} \Phi_\ell(s) \frac{d^{m+1}}{ds^{m+1}} \Phi_k(s) \Big|_a^b + \int_a^b \Phi_{\ell,m}(s) (a_m^+ \Phi_{k,m+1})(s) \varrho(s) ds \\ &= \langle \Phi_{\ell,m}, a_m^+ \Phi_{k,m+1} \rangle \end{aligned}$$

și prin urmare

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\ell,m+1}\|^2 &= \langle \Phi_{\ell,m+1}, \Phi_{\ell,m+1} \rangle = \langle a_m \Phi_{\ell,m}, \Phi_{\ell,m+1} \rangle \\ &= \langle \Phi_{\ell,m}, a_m^+ \Phi_{\ell,m+1} \rangle = (\lambda_\ell - \lambda_m) \|\Phi_{\ell,m}\|^2. \end{aligned}$$

7.6.11 Teoremă. Dacă există k încât $\varrho(s) = \sigma^k(s)$ atunci pentru orice δ operatorii

$$\tilde{a}_m = a_m + \frac{\delta}{2m + 2k + 1} \quad \tilde{a}_m^+ = a_m^+ + \frac{\delta}{2m + 2k + 1}$$

satisfac pentru $m < \Lambda - 1$ cu $2m + 2k + 1 \neq 0$ relațiile

$$\begin{aligned} \tilde{a}_m^+ \tilde{a}_m &= \tilde{\mathcal{H}}_m - \tilde{\lambda}_m & \tilde{a}_m \tilde{\mathcal{H}}_m &= \tilde{\mathcal{H}}_{m+1} \tilde{a}_m \\ \tilde{a}_m \tilde{a}_m^+ &= \tilde{\mathcal{H}}_{m+1} - \tilde{\lambda}_m & \tilde{\mathcal{H}}_m \tilde{a}_m^+ &= \tilde{a}_m^+ \tilde{\mathcal{H}}_{m+1} \end{aligned} \quad (7.33)$$

$\sigma(s)$	$\tau(s)$	$\varrho(s)$	k	(a, b)
s	β	$s^{\beta-1}$	$\beta - 1$	$(0, \infty)$
$1 - s^2$	αs	$(1 - s^2)^{-\alpha/2-1}$	$-\frac{\alpha}{2} - 1$	$(-1, 1)$
$s^2 - 1$	αs	$(s^2 - 1)^{\alpha/2-1}$	$\frac{\alpha}{2} - 1$	$(1, \infty)$
s^2	αs	$s^{\alpha/2-1}$	$\frac{\alpha}{2} - 1$	$(0, \infty)$
$s^2 + 1$	αs	$(s^2 + 1)^{\alpha/2-1}$	$\frac{\alpha}{2} - 1$	$(-\infty, \infty)$

Tabelul 7.2: Cazurile în care $\varrho(s) = \sigma^k(s)$

unde

$$\tilde{\mathcal{H}}_m = \mathcal{H}_m - \delta \frac{d\kappa}{ds} \quad \tilde{\lambda}_m = \lambda_m - \frac{\delta^2}{(2m + 2k + 1)^2}.$$

Demonstrație. Deoarece $a_m^+ a_m = H_m - \lambda_m$ și $a_m a_m^+ = H_{m+1} - \lambda_m$ obținem

$$\begin{aligned} (a_m^+ + \varepsilon)(a_m + \varepsilon) &= \mathcal{H}_m - \lambda_m - \varepsilon(2m + 2k + 1)\kappa'(s) + \varepsilon^2 \\ (a_m + \varepsilon)(a_m^+ + \varepsilon) &= \mathcal{H}_{m+1} - \lambda_m - \varepsilon(2m + 2k + 1)\kappa'(s) + \varepsilon^2 \end{aligned}$$

pentru orice constantă ε . Alegând $\varepsilon = \delta/(2m + 2k + 1)$ obținem (7.33)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_m \tilde{a}_m^+ &= (\tilde{a}_m^+ \tilde{a}_m + \tilde{\lambda}_m) \tilde{a}_m^+ = \tilde{a}_m^+ (\tilde{a}_m \tilde{a}_m^+ + \tilde{\lambda}_m) = \tilde{a}_m^+ \tilde{\mathcal{H}}_{m+1} \\ \tilde{a}_m \tilde{\mathcal{H}}_m &= \tilde{a}_m (\tilde{a}_m^+ \tilde{a}_m + \tilde{\lambda}_m) = (\tilde{a}_m \tilde{a}_m^+ + \tilde{\lambda}_m) \tilde{a}_m = \tilde{\mathcal{H}}_{m+1} \tilde{a}_m. \end{aligned}$$

7.6.12 Teoremă. Dacă $0 \leq m \leq \ell < \Lambda$ și dacă $\tilde{\Phi}_{\ell, \ell}$ verifică relația $\tilde{a}_\ell \tilde{\Phi}_{\ell, \ell} = 0$ atunci

$$\tilde{\Phi}_{\ell, m} = \frac{\tilde{a}_m^+}{\tilde{\lambda}_\ell - \tilde{\lambda}_m} \frac{\tilde{a}_{m+1}^+}{\tilde{\lambda}_\ell - \tilde{\lambda}_{m+1}} \cdots \frac{\tilde{a}_{\ell-2}^+}{\tilde{\lambda}_\ell - \tilde{\lambda}_{\ell-2}} \frac{\tilde{a}_{\ell-1}^+}{\tilde{\lambda}_\ell - \tilde{\lambda}_{\ell-1}} \tilde{\Phi}_{\ell, \ell} \quad (7.34)$$

este funcție proprie a operatorului $\tilde{\mathcal{H}}_m$

$$\tilde{\mathcal{H}}_m \tilde{\Phi}_{\ell, m} = \tilde{\lambda}_\ell \tilde{\Phi}_{\ell, m}$$

și

$$\begin{aligned} \tilde{a}_m \tilde{\Phi}_{\ell, m} &= \begin{cases} 0 & \text{dacă } m = \ell \\ \tilde{\Phi}_{\ell, m+1} & \text{dacă } m < \ell \end{cases} \\ \tilde{a}_m^+ \tilde{\Phi}_{\ell, m+1} &= (\tilde{\lambda}_\ell - \tilde{\lambda}_m) \tilde{\Phi}_{\ell, m}. \end{aligned}$$

Demonstrație. Definiția (7.34) a funcției $\tilde{\Phi}_{\ell, m}$ se poate scrie sub forma

$$\tilde{\Phi}_{\ell, m} = \frac{\tilde{a}_m^+}{\tilde{\lambda}_\ell - \tilde{\lambda}_m} \tilde{\Phi}_{\ell, m+1} \quad (7.35)$$

și

$$\tilde{\mathcal{H}}_\ell \tilde{\Phi}_{\ell,\ell} = (\tilde{a}_\ell^+ \tilde{a}_\ell + \tilde{\lambda}_\ell) \tilde{\Phi}_{\ell,\ell} = \tilde{\lambda}_\ell \tilde{\Phi}_{\ell,\ell}.$$

Relația $\tilde{\mathcal{H}}_m \tilde{\Phi}_{\ell,m} = \tilde{\lambda}_\ell \tilde{\Phi}_{\ell,m}$ se poate verifica prin inducție

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{m+1} \tilde{\Phi}_{\ell,m+1} &= \tilde{\lambda}_\ell \tilde{\Phi}_{\ell,m+1} \\ \Downarrow \\ \tilde{\mathcal{H}}_m \tilde{\Phi}_{\ell,m} &= \frac{\tilde{\mathcal{H}}_m \tilde{a}_m^+}{\tilde{\lambda}_\ell - \tilde{\lambda}_m} \tilde{\Phi}_{\ell,m+1} = \frac{\tilde{a}_m^+ \tilde{\mathcal{H}}_{m+1}}{\tilde{\lambda}_\ell - \tilde{\lambda}_m} \tilde{\Phi}_{\ell,m+1} = \tilde{\lambda}_\ell \tilde{\Phi}_{\ell,m}. \end{aligned}$$

Din relația (7.35) rezultă

$$\tilde{a}_m \tilde{\Phi}_{\ell,m} = \frac{\tilde{a}_m \tilde{a}_m^+}{\tilde{\lambda}_\ell - \tilde{\lambda}_m} \tilde{\Phi}_{\ell,m+1} = \frac{\tilde{\mathcal{H}}_{m+1} - \tilde{\lambda}_m}{\tilde{\lambda}_\ell - \tilde{\lambda}_m} \tilde{\Phi}_{\ell,m+1} = \tilde{\Phi}_{\ell,m+1}.$$

7.6.13 La pag. 282-9 am obținut factorizarea

$$\mathcal{H}_{m+1} - \lambda_m = a_m a_m^+$$

unde

$$\begin{aligned} a_m &= \kappa(s) \left(\frac{d}{ds} - m \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)} \right) \\ a_m^+ &= \kappa(s) \left(-\frac{d}{ds} - \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} - (m-1) \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)} \right). \end{aligned}$$

7.6.14 Factorizarea mai generală

$$\mathcal{H}_{m+1} - \lambda_m = b_m b_m^+ \quad (7.36)$$

cu b_m și b_m^+ de forma

$$\begin{aligned} b_m &= \kappa(s) \left(\frac{d}{ds} + \varphi(s) \right) \\ b_m^+ &= \kappa(s) \left(-\frac{d}{ds} + \psi(s) \right) \end{aligned}$$

are loc dacă

$$\varphi(s) = \psi(s) + \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} - \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)}$$

și dacă ψ este soluție a ecuației Riccati

$$\psi' = -\psi^2 - \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \psi + \frac{v_{m+1}(s) - \lambda_m}{\sigma(s)}.$$

Ecuația Riccati poate fi rezolvată deoarece se cunoaște soluția particulară

$$\psi(s) = -\frac{\tau(s)}{\sigma(s)} - (m-1) \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)} = -\frac{\tau(s)}{\sigma(s)} - \frac{m-1}{2} \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s)}.$$

Soluția generală a ecuației Riccati este (a se vedea (7.22))

$$\psi_\gamma(s) = -\frac{\tau(s)}{\sigma(s)} - \frac{m-1}{2} \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s)} + \frac{\sigma^m(s) \varrho(s)}{\gamma + \int_{s_0}^s \sigma^m(t) \varrho(t) dt}$$

unde γ și $s_0 \in (a, b)$ sunt constante.

7.6.15 În cazul nostru ne vom restrânge la acele valori ale lui γ pentru care ψ_γ nu are puncte singulare în (a, b) . Polinomul $\sigma^m(t)$ este integrabil în (a, b) în raport cu $\varrho(t)$ și $\sigma(t) > 0$, $\varrho(t) > 0$, oricare ar fi $t \in (a, b)$. De aceea,

$$-\infty < -\int_a^b \sigma^m(t) \varrho(t) dt \leq \int_{s_0}^s \sigma^m(t) \varrho(t) dt \leq \int_a^b \sigma^m(t) \varrho(t) dt < \infty$$

pentru orice $s, s_0 \in (a, b)$ și prin urmare mulțimea valorilor lui γ pentru care ψ_γ nu are puncte singulare în (a, b) este nevidă.

7.6.16 Am obținut factorizarea [6]

$$\mathcal{H}_{m+1} - \lambda_m = b_m b_m^+ \quad (7.37)$$

unde

$$\begin{aligned} b_m &= \kappa(s) \left(\frac{d}{ds} + \varphi_\gamma(s) \right) \\ b_m^+ &= \kappa(s) \left(-\frac{d}{ds} + \psi_\gamma(s) \right) \end{aligned} \quad (7.38)$$

și

$$\begin{aligned} \psi_\gamma(s) &= -\frac{\tau(s)}{\sigma(s)} - \frac{m-1}{2} \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s)} + \frac{\sigma^m(s) \varrho(s)}{\gamma + \int_{s_0}^s \sigma^m(t) \varrho(t) dt} \\ \varphi_\gamma(s) &= -\frac{m}{2} \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s)} + \frac{\sigma^m(s) \varrho(s)}{\gamma + \int_{s_0}^s \sigma^m(t) \varrho(t) dt} \end{aligned}$$

7.6.17 Operatorii

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{m,\gamma} &= b_m^+ b_m + \lambda_m \\ &= \kappa(s) \left(-\frac{d}{ds} + \psi_\gamma(s) \right) \kappa(s) \left(\frac{d}{ds} + \varphi_\gamma(s) \right) + \lambda_m \end{aligned}$$

cu γ astfel încât ψ_γ nu are puncte singulare în (a, b) , au forma

$$\mathcal{H}_{m,\gamma} = -\sigma(s) \frac{d^2}{ds^2} - \tau(s) \frac{d}{ds} + v_{m,\gamma}(s)$$

și pot fi priviți ca *parteneri supersimetrice* ai operatorului $\mathcal{H}_{m+1}$.

7.6.18 Funcțiile $b_m^+ \Phi_{\ell,m+1}$ sunt funcții proprii ale operatorului $\mathcal{H}_{m,\gamma}$. Avem

$$\mathcal{H}_{m,\gamma} (b_m^+ \Phi_{\ell,m+1}) = (b_m^+ b_m + \lambda_m) b_m^+ \Phi_{\ell,m+1} = b_m^+ \mathcal{H}_{m+1} \Phi_{\ell,m+1} = \lambda_\ell (b_m^+ \Phi_{\ell,m+1}).$$

7.6.19 Exemplu. În cazul $\sigma(s) = 1$, $\tau(s) = \alpha s + \beta$ (a se vedea Tabelul 7.1), operatorul

$$\mathcal{H}_{m+1} = -\frac{d^2}{ds^2} - (\alpha s + \beta) \frac{d}{ds} - \alpha m$$

admite partenerii supersimetrice

$$\mathcal{H}_{m,\gamma} = \left(-\frac{d}{ds} + \psi_\gamma(s) \right) \left(\frac{d}{ds} + \varphi_\gamma(s) \right) - \alpha m$$

unde

$$\psi_\gamma(s) = -(\alpha s + \beta) + \frac{e^{\alpha \frac{s^2}{2} + \beta s}}{\gamma + \int_0^s e^{\alpha \frac{t^2}{2} + \beta t} dt}$$

și

$$\varphi_\gamma(s) = \frac{e^{\alpha \frac{s^2}{2} + \beta s}}{\gamma + \int_0^s e^{\alpha \frac{t^2}{2} + \beta t} dt}.$$

7.7 Ecuații Schrödinger rezolvabile explicit

7.7.1 Oscilatorul armonic liniar. Funcțiile și valorile proprii ale operatorului

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2$$

pot fi determinate cu ajutorul operatorilor de creștere și coborâre

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} + x \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dx} + x \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

care verifică relațiile

$$a^* a = \mathbf{H} - \frac{1}{2} \quad aa^* = \mathbf{H} + \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{H} a^* = a^* (\mathbf{H} + 1) \quad \mathbf{H} a = a (\mathbf{H} - 1).$$

Dacă $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ este o funcție proprie a operatorului $\mathbf{H}$ corespunzătoare valorii λ

$$\mathbf{H}\psi = \lambda\psi$$

atunci

$$\lambda = \frac{\langle \psi, \mathbf{H}\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} = \frac{\langle \psi, a^* a \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} + \frac{1}{2} = \frac{\langle a \psi, a \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

În cazul în care sunt ne-nule și aparțin spațiului $L^2(\mathbb{R})$, funcțiile $a^*\psi$ și $a\psi$ sunt funcții proprii corespunzătoare valorilor proprii $\lambda + 1$ și $\lambda - 1$, respectiv

$$\mathbf{H}(a^*\psi) = a^*(\mathbf{H} + 1)\psi = (\lambda + 1) a^*\psi$$

$$\mathbf{H}(a\psi) = a(\mathbf{H} - 1)\psi = (\lambda - 1) a\psi.$$

Funcția normată

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

cu proprietatea

$$a\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}} \left(\frac{d}{dx} + x \right) e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

este funcție proprie a operatorului $\mathbf{H}$ corespunzătoare valorii proprii minime $\lambda_0 = \frac{1}{2}$

$$\mathbf{H}\psi_0 = \left(a^*a + \frac{1}{2} \right) \psi_0 = \frac{1}{2} \psi_0.$$

Funcțiile

$$\psi_1 = a^* \psi_0, \quad \psi_2 = (a^*)^2 \psi_0, \quad \psi_3 = (a^*)^3 \psi_0, \quad \dots$$

sunt funcții proprii ale lui $\mathbf{H}$ corespunzătoare valorilor proprii $1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{2}, \dots$

Utilizând rezultatele de la pag. 272-21 obținem

$$\begin{aligned} \psi_n(x) = (a^*)^n \psi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2^n \sqrt{\pi}}} \left(-\frac{d}{dx} + x \right)^n e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n \sqrt{\pi}}} (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n \sqrt{\pi}}} H_n^*(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^{2n} \sqrt{\pi}}} H_n \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

Deoarece $\{\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots\}$ este bază în $L^2(\mathbb{R})$, valorile proprii $1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{2}, \dots$ sunt singurele valori proprii ale lui $\mathbf{H}$.

7.7.2 Pe parcursul acestei secțiuni vom arăta că ecuațiile Schrödinger rezolvabile explicit cu ajutorul polinoamelor ortogonale și a funcțiilor speciale asociate pot fi analizate utilizând metoda operatorială prezentată, numită *metoda factorizării*.

7.7.3 Dacă funcția bijectivă derivabilă $(a', b') \rightarrow (a, b) : x \mapsto s(x)$ este astfel încât

$$ds/dx = \pm \kappa(s(x))$$

atunci

$$[\kappa(s)\varrho(s)]^{1/2} \mathcal{H}_m[\kappa(s)\varrho(s)]^{-1/2} \big|_{s=s(x)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_m(x)$$

este un operator de tip Schrödinger și funcțiile

$$\Psi_{\ell,m} : (a', b') \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Psi_{\ell,m}(x) = \sqrt{\kappa(s(x)) \varrho(s(x))} \Phi_{\ell,m}(s(x))$$

cu $m \leq \ell < \Lambda$ sunt funcții proprii

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_m(x) \right] \Psi_{\ell,m} = \lambda_\ell \Psi_{\ell,m}$$

de pătrat integrabil

$$\begin{aligned}
\int_{a'}^{b'} |\Psi_{\ell,m}(x)|^2 dx &= \int_{a'}^{b'} |\Phi_{\ell,m}(s(x))|^2 \varrho(s(x)) \frac{d}{dx} s(x) dx \\
&= \int_a^b |\Phi_{\ell,m}(s)|^2 \varrho(s) ds < \infty
\end{aligned}$$

ortogonale

$$\int_{a'}^{b'} \Psi_{\ell,m}(x) \Psi_{k,m}(x) dx = \int_a^b \Phi_{\ell,m}(s) \Phi_{k,m}(s) \varrho(s) ds = 0 \quad \text{pentru } \ell \neq k.$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & \vdots & \xleftarrow[A_0^+]{A_0^+} & \vdots & \xleftarrow[A_1^+]{A_1^+} & \vdots & \xleftarrow[A_2^+]{A_2^+} & \vdots \\
\lambda_3 & \Psi_{3,0} & & \Psi_{3,1} & & \Psi_{3,2} & & \Psi_{3,3} \\
\\
\lambda_2 & \Psi_{2,0} & \xleftarrow[A_0^+]{A_0^+} & \Psi_{2,1} & \xleftarrow[A_1^+]{A_1^+} & \Psi_{2,2} & & \\
\\
\lambda_1 & \Psi_{1,0} & \xleftarrow[A_0^+]{A_0^+} & \Psi_{1,1} & & & & \\
\\
\lambda_0 & \Psi_{0,0} & & & & & &
\end{array}$$

Figura 7.6: Funcțiile $\Psi_{\ell,m}$ sunt legate prin operatorii A_m, A_m^+ .

7.7.4 Relațiile (9) conduc în cazul operatorilor de tip Schrödinger la factorizările

$$\begin{aligned}
-\frac{d^2}{dx^2} + V_m(x) - \lambda_m &= A_m^+ A_m = \left(\mp \frac{d}{dx} + W_m(x) \right) \left(\pm \frac{d}{dx} + W_m(x) \right) \\
-\frac{d^2}{dx^2} + V_{m+1}(x) - \lambda_m &= A_m A_m^+ = \left(\pm \frac{d}{dx} + W_m(x) \right) \left(\mp \frac{d}{dx} + W_m(x) \right)
\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}
A_m &= [\kappa(s) \varrho(s)]^{1/2} a_m [\kappa(s) \varrho(s)]^{-1/2} \Big|_{s=s(x)} = \pm \frac{d}{dx} + W_m(x) \\
A_m^+ &= [\kappa(s) \varrho(s)]^{1/2} a_m^+ [\kappa(s) \varrho(s)]^{-1/2} \Big|_{s=s(x)} = \mp \frac{d}{dx} + W_m(x)
\end{aligned}$$

și W_m este superpotențialul

$$W_m(x) = -\frac{\tau(s(x))}{2\kappa(s(x))} - \left(m - \frac{1}{2} \right) \frac{d\kappa}{ds}(s(x)) = \mp \frac{\dot{\Psi}_{m,m}(x)}{\Psi_{m,m}(x)}.$$

Din (7.29) rezultă (a se vedea Figura 7.6)

$$\begin{aligned}
A_m \Psi_{\ell,m} &= \begin{cases} 0 & \text{pentru } \ell = m \\ \Psi_{\ell,m+1} & \text{pentru } m < \ell < \Lambda \end{cases} \\
A_m^+ \Psi_{\ell,m+1} &= (\lambda_\ell - \lambda_m) \Psi_{\ell,m} \quad \text{pentru } 0 \leq m < \ell < \Lambda.
\end{aligned} \tag{7.39}$$

O consecință directă a formulei (7.31) este relația

$$\Psi_{\ell,m}(x) = \begin{cases} \sqrt{\kappa(s(x))} \varrho(s(x)) \kappa^\ell(s(x)) & \text{pentru } m = \ell \\ \frac{A_m^+}{\lambda_\ell - \lambda_m} \frac{A_{m+1}^+}{\lambda_\ell - \lambda_{m+1}} \cdots \frac{A_{\ell-1}^+}{\lambda_\ell - \lambda_{\ell-1}} \Psi_{\ell,\ell}(s) & \text{pentru } 0 < m < \ell < \Lambda \end{cases}$$

7.7.5 Cazuri particulare (a se vedea Tabelul 7.1).

Fie $\alpha_m = -(2m + \alpha - 1)/2$ și $\alpha'_m = (2m - \alpha - 1)/2$.

1. Oscilatorul translatat

În cazul $\sigma(s) = 1$, alegând $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto s(x) = x$, obținem:

$$W_m(x) = -\frac{\alpha x + \beta}{2}$$

$$V_m(x) = \frac{(\alpha x + \beta)^2}{4} + \frac{\alpha}{2} + \lambda_m$$

$$\lambda_m = -\alpha m$$

2. Oscilatorul tridimensional

În cazul $\sigma(s) = s$, alegând $(0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : x \mapsto s(x) = \frac{x^2}{4}$, obținem:

$$W_m(x) = -\frac{\alpha}{4}x - \left(\beta + m - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x}$$

$$V_m(x) = \frac{\alpha^2}{16}x^2 + \left(\beta + m - \frac{1}{2}\right) \left(\beta + m - \frac{3}{2}\right) \frac{1}{x^2} + \frac{\alpha}{2}(\beta + m) + \lambda_m$$

$$\lambda_m = -\alpha m$$

3. Potențialul de tip Pöschl-Teller

În cazul $\sigma(s) = 1 - s^2$, alegând $(0, \pi) \rightarrow (-1, 1) : x \mapsto s(x) = \cos x$, obținem:

$$W_m(x) = \alpha'_m \cotan x - \frac{\beta}{2} \operatorname{cosec} x = \frac{\alpha'_m + \beta}{2} \cotan \frac{x}{2} - \frac{\alpha'_m - \beta}{2} \tan \frac{x}{2}$$

$$V_m(x) = \left(\alpha_m'^2 - \alpha'_m + \frac{\beta^2}{4}\right) \operatorname{cosec}^2 x - (2\alpha'_m - 1) \frac{\beta}{2} \cotan x \operatorname{cosec} x - \alpha_m'^2 + \lambda_m$$

$$\lambda_m = m(m - \alpha - 1)$$

4. Potențialul Pöschl-Teller generalizat

În cazul $\sigma(s) = s^2 - 1$, alegând $(0, \infty) \rightarrow (1, \infty) : x \mapsto s(x) = \cosh x$, obținem:

$$W_m(x) = \alpha_m \cotanh x - \frac{\beta}{2} \operatorname{cosech} x$$

$$V_m(x) = \left(\alpha_m^2 + \alpha_m + \frac{\beta^2}{4}\right) \operatorname{cosech}^2 x - (2\alpha_m + 1) \frac{\beta}{2} \cotanh x \operatorname{cosech} x + \alpha_m^2 + \lambda_m$$

$$\lambda_m = -m(m + \alpha - 1)$$

5. Potențialul de tip Morse

În cazul $\sigma(s) = s^2$, alegând $\mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) : x \mapsto s(x) = e^x$, obținem:

$$W_m(x) = -\frac{\beta}{2}e^{-x} + \alpha_m$$

$$V_m(x) = \frac{\beta^2}{4}e^{-2x} - (2\alpha_m + 1) \frac{\beta}{2}e^{-x} + \alpha_m^2 + \lambda_m$$

$$\lambda_m = -m(m + \alpha - 1)$$

6. Potențialul de tip Scarf hiperbolic

În cazul $\sigma(s) = s^2$, alegând $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto s(x) = \sinh x$, obținem:

$$W_m(x) = \alpha_m \tanh x - \frac{\beta}{2} \operatorname{sech} x$$

$$V_m(x) = \left(-\alpha_m^2 - \alpha_m + \frac{\beta^2}{4} \right) \operatorname{sech}^2 x - (2\alpha_m + 1) \frac{\beta}{2} \tanh x \operatorname{sech} x + \alpha_m^2 + \lambda_m$$

$$\lambda_m = -m(m + \alpha - 1)$$

7.7.6 În cazurile prezentate în Tabelul 7.2 obținem relațiile

$$[\kappa(s)\varrho(s)]^{1/2} \tilde{\mathcal{H}}_m[\kappa(s)\varrho(s)]^{-1/2}|_{s=s(x)} = -\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{V}_m(x)$$

$$\tilde{A}_m = [\kappa(s)\varrho(s)]^{1/2} \tilde{a}_m[\kappa(s)\varrho(s)]^{-1/2}|_{s=s(x)} = \pm \frac{d}{dx} + \tilde{W}_m(x)$$

$$\tilde{A}_m^+ = [\kappa(s)\varrho(s)]^{1/2} \tilde{a}_m^+[\kappa(s)\varrho(s)]^{-1/2}|_{s=s(x)} = \mp \frac{d}{dx} + \tilde{W}_m(x)$$

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{V}_m(x) - \lambda_m = \tilde{A}_m^+ \tilde{A}_m = \left(\mp \frac{d}{dx} + \tilde{W}_m(x) \right) \left(\pm \frac{d}{dx} + \tilde{W}_m(x) \right) \\ -\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{V}_{m+1}(x) - \lambda_m = \tilde{A}_m \tilde{A}_m^+ = \left(\pm \frac{d}{dx} + \tilde{W}_m(x) \right) \left(\mp \frac{d}{dx} + \tilde{W}_m(x) \right) \end{cases}$$

unde

$$\tilde{W}_m(x) = -\frac{\tau(s(x))}{2\kappa(s(x))} - \left(m - \frac{1}{2} \right) \frac{d\kappa}{ds}(s(x)) + \frac{\delta}{2m + 2k + 1}.$$

Pentru $m \leq \ell < \Lambda$ funcțiile

$$\tilde{\Psi}_{\ell,m} : (a', b') \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{\Psi}_{\ell,m}(x) = \sqrt{\kappa(s(x)) \varrho(s(x))} \tilde{\Phi}_{\ell,m}(s(x))$$

sunt funcții proprii ale operatorului de tip Schrödinger

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{V}_m(x) \right] \tilde{\Psi}_{\ell,m} = \tilde{\lambda}_\ell \tilde{\Psi}_{\ell,m}.$$

7.7.7 Cazuri particulare (a se vedea Tabelul 7.2).

Fie $\alpha_m = -(2m + \alpha - 1)/2$ și $\alpha'_m = (2m - \alpha - 1)/2$.

1. Potențiale de tip Coulomb

În cazul $\sigma(s) = s$, alegând $(0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : x \mapsto s(x) = \frac{x^2}{4}$, obținem:

$$\tilde{W}_m(x) = -\left(\beta + m - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{x} + \frac{\delta}{2m + 2\beta - 1}$$

$$\tilde{V}_m(x) = \left(\beta + m - \frac{1}{2} \right) \left(\beta + m - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{x^2} - \delta \frac{1}{x}$$

$$\tilde{\lambda}_m = -\frac{\delta^2}{(2m + 2\beta - 1)^2}$$

2. *Potențiale de tip Rosen-Morse trigonometrice*

În cazul $\sigma(s) = 1 - s^2$, alegând $(0, \pi) \rightarrow (-1, 1) : x \mapsto s(x) = \cos x$, obținem:

$$\tilde{W}_m(x) = \alpha'_m \cotan x + \frac{\delta}{2m-\alpha-1}$$

$$\tilde{V}_m(x) = (\alpha'^2_m - \alpha'_m) \operatorname{cosec}^2 x + \delta \cotan x - \alpha'^2_m + m(m - \alpha - 1)$$

$$\tilde{\lambda}_m = m(m - \alpha - 1) - \frac{\delta^2}{(2m-\alpha-1)^2}$$

3. *Potențiale de tip Eckart*

În cazul $\sigma(s) = s^2 - 1$, alegând $(0, \infty) \rightarrow (1, \infty) : x \mapsto s(x) = \cosh x$, obținem:

$$\tilde{W}_m(x) = \alpha_m \cotanh x + \frac{\delta}{2m+\alpha-1}$$

$$\tilde{V}_m(x) = (\alpha_m^2 + \alpha_m) \operatorname{cosech}^2 x - \delta \cotanh x + \alpha_m^2 - m(m - \alpha - 1)$$

$$\tilde{\lambda}_m = -m(m + \alpha - 1) - \frac{\delta^2}{(2m+\alpha-1)^2}$$

4. *Potențiale de tip Rosen-Morse hiperbolice*

În cazul $\sigma(s) = s^2 + 1$, alegând $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto s(x) = \sinh x$, obținem:

$$\tilde{W}_m(x) = \alpha_m \tanh x + \frac{\delta}{2m+\alpha-1}$$

$$\tilde{V}_m(x) = -(\alpha_m^2 + \alpha_m) \operatorname{sech}^2 x - \delta \tanh x + \alpha_m^2 - m(m - \alpha - 1)$$

$$\tilde{\lambda}_m = -m(m + \alpha - 1) - \frac{\delta^2}{(2m+\alpha-1)^2}$$

7.7.8 Dacă schimbarea de variabilă $(a', b') \rightarrow (a, b) : x \mapsto s(x)$ este astfel încât

$$ds/dx = \pm \kappa(s(x))$$

atunci operatorilor b_m și b_m^+ definiți la pag. 285-16 le corespund operatorii

$$B_m = [\kappa(s)\varrho(s)]^{1/2} b_m [\kappa(s)\varrho(s)]^{-1/2} \big|_{s=s(x)} = \pm \frac{d}{dx} + W_{m,\gamma}(x)$$

$$B_m^+ = [\kappa(s)\varrho(s)]^{1/2} b_m^+ [\kappa(s)\varrho(s)]^{-1/2} \big|_{s=s(x)} = \mp \frac{d}{dx} + W_{m,\gamma}(x)$$

cu *superpotentialul* $W_{m,\gamma}(x)$ definit prin formula

$$W_{m,\gamma}(x) = -\frac{\tau(s(x))}{2\kappa(s(x))} - \left(m - \frac{1}{2}\right) \kappa'(s(x)) + \kappa(s(x)) \frac{\sigma^m(s(x)) \varrho(s(x))}{\gamma + \int^{s(x)} \sigma^m(t) \varrho(t) dt}.$$

Operatorul de tip Schrödinger corespunzător lui $\mathcal{H}_{m+1}$ și anume

$$-\frac{d^2}{dx^2} + V_{m+1}(x) = B_m B_m^+ + \lambda_m = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{m,\gamma}^2(x) \pm W'_{m,\gamma}(x) + \lambda_m$$

admite partenerii supersimetrice [6]

$$-\frac{d^2}{dx^2} + V_{m,\gamma}(x) = B_m^+ B_m + \lambda_m = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{m,\gamma}^2(x) \mp W'_{m,\gamma}(x) + \lambda_m$$

și are loc relația

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_{m,\gamma}(x)\right) (B_m^+ \Psi_{\ell,m+1}) = \lambda_l (B_m^+ \Psi_{\ell,m+1}).$$

Bibliografie

- [1] I. Armeanu, *Analiză Funcțională*, Editura Universității din București, 1998.
- [2] D. Beklémichev, *Cours de Géométrie Analytique et d'Algèbre Linéaire*, Éditions Mir, Moscou, 1988.
- [3] V. Brînzănescu, O. Stănășilă, *Matematici Speciale. Teorie, Exemple, Aplicații*, Editura ALL EDUCATIONAL S. A., 1998.
- [4] N. Cotfas, *Elemente de Algebra Liniară*, Editura Universității din București, 2009.
- [5] N. Cotfas și L. A. Cotfas, *Elemente de Analiză Matematică*, Editura Universității din București, 2010.
- [6] N. Cotfas și L. A. Cotfas, Hypergeometric type operators and their supersymmetric partners, *J. Math. Phys.* **52** (2011) 052101
- [7] Nicolae Cotfas and Daniela Dragoman, Properties of finite Gaussians and the discrete-continuous transition, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** (2012) 425305.
- [8] N. Cotfas, J.-P. Gazeau and A. Vourdas, Finite-dimensional Hilbert space and frame quantization, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011) 175303.
- [9] J.-P. Gazeau, *Coherent States in Quantum Physics*, Wiley-VCH, Berlin, 2009.
- [10] S. J. Gustafson and I. M. Sigal, *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics*, Springer, Berlin, 2011.
- [11] P. Hamburg, P. Mocanu și N. Negoescu, *Analiză Matematică (Funcții complexe)*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.

- [12] L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Analiză Funcțională*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986.
- [13] M. L. Mehta, 1987 Eigenvalues and eigenvectors of the finite Fourier transform, *J. Math. Phys.* **28** (1987) 781
- [14] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, vol. I, North-Holland, Amsterdam, 1961.
- [15] W. Miller, Jr., *Lie Theory and Special Functions*, Academic Press, New York, 1968.
- [16] G. Mocică , Probleme de Funcții Speciale, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1988.
- [17] M. Naïmark, A. Stern, *Théorie des Représentations des Groupes*, Éditions Mir, Moscou, 1979.
- [18] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu, *Bazele Algebrei*, vol I, Editura Academiei, București, 1986.
- [19] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov, and V. B. Uvarov, *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable* Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [20] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications* , Springer, Berlin, 1986.
- [21] M.-E. Piticu, M. Vraciu, C. Timofte, G. Pop, *Ecuatii Diferențiale. Culegere de Probleme*, Editura Universității București, 1995.
- [22] I. L. Popescu, I. Armeanu, D. Blideanu, N. Cotfas și I. Șandru, Probleme de Analiză Complexă, Editura Tehnică, București, 1995.
- [23] R. Richtmyer, *Principles of Advanced Mathematical Physics*, Springer-Verlag, 1978.
- [24] M. Ruzzi, Jacobi θ -functions and discrete Fourier transform, *J. Math. Phys.* **47** (2006) 063507.
- [25] J.D. Talman, *Special Functions. A Group Theoretical Approach*, Benjamin, New York, 1968.

- [26] C. Teleman, M. Teleman, *Elemente de teoria grupurilor cu aplicații în topologie și fizică*, Editura Științifică, București, 1973.
- [27] C. Udriște, C. Radu, C. Dicu, O. Mălăncioiu, *Algebră, Geometrie și Ecuații Diferențiale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
- [28] N. Ja. Vilenkin, *Fonctions Spéciales et Théorie de la Représentation des Groupes*, Dunod, Paris, 1969.
- [29] N. J. Vilenkin and A. U. Klimyk, *Special Functions and Integral Transforms*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1992.
- [30] V. S. Vladimirov, *Ecuațiile Fizicii Matematice*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1980.
- [31] V. Vladimirov, *Distributions en Physique Mathématique*, Editions MIR, Moscou, 1979.
- [32] V. S. Vladimirov și alții, Culegere de Probleme de Ecuațiile Fizicii Matematice, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1981.
- [33] A. Vourdas, Quantum systems with finite Hilbert space, *Rep. Prog. Phys.* **67** (2004) 267-320.
- [34] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Cambridge Mathematical Library: A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.